# Секція 6
# «Автоматизація та приладобудування»

УДК 681.513.3

## КЕРУВАННЯ РУХОМ ОДНОКОЛІСНОГО МОБІЛЬНОГО РОБОТА ЗА ЗАДАНОЮ ТРАЄКТОРІЄЮ

В.С. Тризна, О.Г. Гурко
*Харківський національний автомобільно-дорожній університет*
*narkotiktv22@gmail.com, gurko@khadi.kharkov.ua*

Мобільні роботи бурхливо розвиваються, і одним з важливих завдань, що стоять перед ними, є рух заданою траєкторією. Цікавим представником мобільних роботів є одноколісні роботи [1], тому розглянемо, як можна забезпечити рух такого робота по певній траєкторії. Для простоти будемо розглядати лише кінематику робота. Кінематична модель одноколісного мобільного робота має такий вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t)\cos\varphi(t), \\ \dot{y}(t) = v(t)\sin\varphi(t), \\ \dot{\varphi}(t) = \omega(t), \end{cases} \tag{1}$$

де $x(t)$, $y(t)$ – виміряні за допомогою датчиків координати робота (точніше точки контакту колеса з поверхнею) в глобальній системі координат,

$\varphi(t)$ – кут повороту колеса щодо осі $x$,

$v(t)$ – лінійна швидкість руху робота,

$\omega(t)$ – кутова швидкість колеса навколо вертикальної осі.

Розглянемо два робота: один реальний з кінематикою, що описується рівнянням (1), а другий умовний, що рухається бажаним чином і його кінематика, відповідно, описується бажаними рівняннями:

$$\begin{cases} \dot{x}_d(t) = v_d(t)\cos\varphi_d(t), \\ \dot{y}_d(t) = v_d(t)\sin\varphi_d(t), \\ \dot{\varphi}_d(t) = \omega_d(t), \end{cases} \tag{2}$$

де $x_d(t)$, $y_d(t)$, $\varphi_d(t)$ – бажані координати робота.

Перейдемо з глобальної системи координат у локальну систему координат робота та розглянемо різницю між дійсним та бажаним рухами за кожною з координат $e_x(t)$, $e_y(t)$, $e_\varphi(t)$:

$$
\begin{cases}
e_x(t) = \cos\varphi(t)\big(x_d(t) - x(t)\big) + \sin\varphi(t)\big(y_d(t) - y(t)\big), \\
e_y(t) = -\sin\varphi(t)\big(x_d(t) - x(t)\big) + \cos\varphi(t)\big(y_d(t) - y(t)\big), \\
e_\varphi(t) = \varphi_d(t) - \varphi(t).
\end{cases} \tag{3}
$$

Продиференціювавши (3) за часом та використавши (1) і (2), отримаємо:

$$
\begin{cases}
\dot{e}_x(t) = v_d(t)\cos e_\varphi(t) - v(t) + \omega(t)e_y(t), \\
\dot{e}_y(t) = v_d(t)\sin e_\varphi(t) - \omega(t)e_x(t), \\
\dot{e}_\varphi(t) = \omega_d(t) - \omega(t).
\end{cases} \tag{4}
$$

Система рівнянь (4) є нелінійною. Для цілей керування бажано провести лінеаризацію та розглядати лінійну модель поведінки похибки руху. Лінеаризацію будемо виконувати навколо точки, у якій помилки дорівнюють 0, тобто коли реальний робот рухається точно заданою траєкторією. Оскільки лінеаризація виконується саме навколо цієї точки, вважаємо, що похибки $e_x$, $e_y$, $e_\varphi$ все ж присутні, але є малими. Тоді можна вважати, що $\sin e_\varphi \approx e_\varphi$, $\cos e_\varphi \approx 1$. У цьому випадку:

$$
\begin{cases}
\dot{e}_x(t) = v_d(t) - v(t) + \omega(t)e_y(t), \\
\dot{e}_y(t) = v_d(t)e_\varphi(t) - \omega(t)e_x(t), \\
\dot{e}_\varphi(t) = \omega_d(t) - \omega(t).
\end{cases} \tag{5}
$$

Компенсувати помилки руху повинна система керування роботом. Введемо:

$$
\begin{cases}
v(t) = v_d(t) - u_1(t), \\
\omega(t) = \omega_d(t) - u_2(t),
\end{cases} \tag{6}
$$

де $u_1(t)$ та $u_2(t)$ – керуючі впливи, спрямовані на усунення відхилення лінійної та кутової швидкостей реального робота від відповідних бажаних значень.

Якщо підставити (6) до (5) та прийняти до уваги, що $e_x(t)u_2(t)$ та $e_y(t)u_2(t)$ є членами другого порядку малості та ними можна знехтувати, то отримаємо:

$$
\begin{cases}
\dot{e}_x(t) = \omega_d(t)e_y(t) + u_1(t), \\
\dot{e}_y(t) = -\omega_d(t)e_x(t) + v_d(t)e_\varphi(t), \\
\dot{e}_\varphi(t) = u_2(t).
\end{cases} \tag{7}
$$

Як закон керування приймемо пропорційний закон. У цьому випадку необхідно знайти такі коефіцієнти підсилення $k_x$, $k_y$ та $k_\varphi$, які забезпечать рух робота заданою траєкторією з нульовою помилкою. Проте ми маємо лише два керуючих впливи $u_1(t)$, $u_2(t)$, тобто закон керування буде дещо складніший, ніж звичайний пропорційний закон. З першого рівняння системи (7) бачимо, що за допомогою $u_1(t)$ доцільно зменшувати помилку руху у поздовжньому напрямку $e_x(t)$, тобто можна записати:

$$u_1(t) = -k_x e_x(t)\,. \tag{8}$$

З третього рівняння системи (7) видно, що $u_2(t)$ безпосередньо впливає на зміну помилки по кутовому положенню. Однак інтуїтивно зрозуміло, що бокова похибка $e_y$(t) також усувається поворотом робота. Тобто керуючий вплив $u_2(t)$ одночасно усуває ці дві похибки, тобто

$$u_2(t) = -k_y e_y(t) - k\varphi e_\varphi(t). \tag{9}$$

Підставимо ці рівняння до системи (7):

$$\begin{cases} \dot{e}_x(t) = -k_x e_x(t) + \omega_d(t) e_y(t), \\ \dot{e}_y(t) = -\omega_d(t) e_x(t) + v_d(t) e_\varphi(t), \\ \dot{e}_\varphi(t) = -k_y e_y(t) - k_\varphi e_\varphi(t), \end{cases} \tag{10}$$

де значення коефіцієнтів $k_x$, $k_y$ та $k_\varphi$ оберемо з умови стійкості системи керування, використавши метод призначення полюсів [2]. Для цього систему (10) зручно представити в матричному вигляді:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{e}(t)\,, \tag{11}$$

де $\mathbf{e}(t)$ – вектор похибок,

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -k_x & -\omega_d(t) & 0 \\ \omega_d(t) & 0 & v_d(t) \\ 0 & -k_y & -k_\varphi \end{bmatrix}.$$

Стійкість системи керування визначається знаком дійсної частини коренів характеристичного рівняння:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}(t)) = 0\,, \tag{12}$$

де $\mathbf{I}$ – одинична матриця;

$\lambda$ – власні числа матриці $\mathbf{A}$.

Розрахувавши визначник (12), отримаємо рівняння:

$$\lambda^3 + (k_x + k_\varphi)\lambda^2 + \left(k_x k_\varphi + \omega_d^2(t) + v_d(t)k_y\right)\lambda + \left(\omega_d^2(t)k_\varphi + v_d(t)k_x k_y\right) = 0\,. \tag{13}$$

Нехай бажаний рух робота описується бажаним характеристичним рівнянням:

$$(\lambda + 2\zeta\omega_n)(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2) = 0, \qquad (14)$$

де $\zeta$ – коефіцієнт загасання,
$\omega_n$ – власна частота системи.

Якщо розкрити дужки, то отримаємо:

$$\lambda^3 + 4\zeta\omega_n\lambda^2 + (4\zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2)\lambda + 2\zeta\omega_n^3 = 0, \qquad (15)$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях у (13) і (15):

$$\begin{cases} k_x + k_\varphi = 4\zeta\omega_n, \\ k_x k_\varphi + \omega_d^2(t) + v_d(t)k_y = 4\zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2, \\ \omega_d^2(t)k_\varphi + v_d(t)k_x k_y = 2\zeta\omega_n^3. \end{cases} \qquad (16)$$

Для зручності приймемо

$$k_x = k_\varphi = 2\zeta\omega_n, \qquad (17)$$

тоді

$$k_y = \frac{\omega_n^2 - \omega_d^2(t)}{v_d(t)}. \qquad (18)$$

Таким чином, задавшися бажаними значеннями $\zeta$ і $\omega_n$ можна за допомогою формул (17) – (18) знайти значення коефіцієнтів регулятора $k_x$, $k_y$ та $k_\varphi$, які забезпечать бажаний рух робота заданою траєкторією за ідеальних умов.

## Література


1. Robotic Acrobatics: Robo Murata Seiko-chan rides unicycle. *Luxurylaunches*. URL: https://luxurylaunches.com/other_stuff/robotic_acrobatics_robo_murata_seikochan_rides_unicycle.php.

2. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування: Підручник. К.: Либідь, 2007. 656 с.