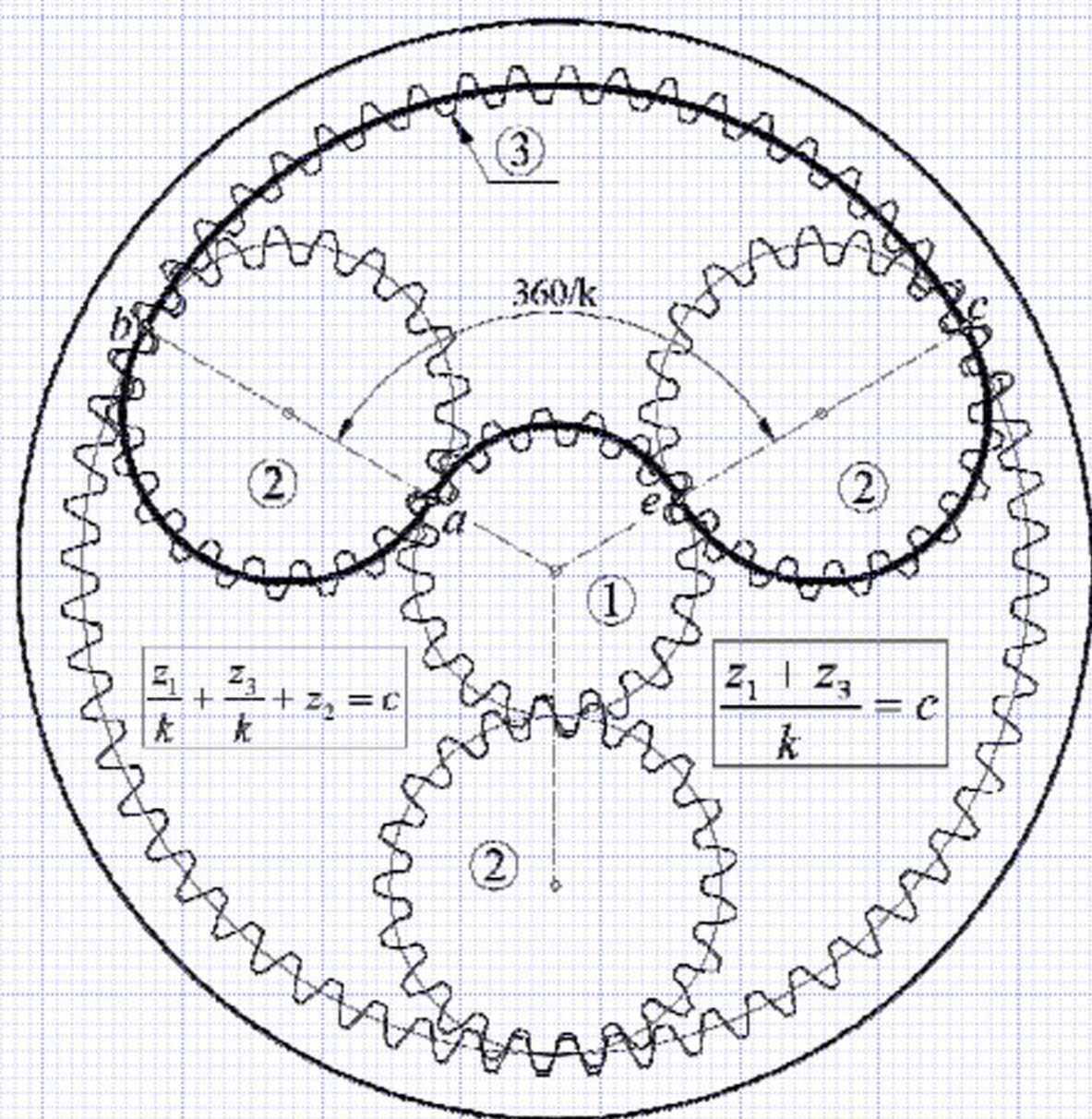


Перегон В.А., Воропай О.В., Коряк О.О., Єгоров П.А.

ВАЖІЛЬНІ МЕХАНІЗМИ, ПЕРЕДАЧІ ТА ЗАЧЕПЛЕННЯ



Харків 2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Перегон В.А., Воропай О.В., Коряк О.О., Єгоров П.А.

**ВАЖІЛЬНІ МЕХАНІЗМИ,
ПЕРЕДАЧІ ТА ЗАЧЕПЛЕННЯ**

Навчальний посібник
для студентів технічних спеціальностей
закладів вищої освіти

Харків

2025

УДК 531.8

*Рекомендовано до видання рішенням Вченої Ради
Харківського національного автомобільно-дорожнього університету
(Дозвіл №73/25/4.5 від 23 січня 2025 р.)*

Рецензенти:

- *Бати́гін Юрій Ві́кторович*, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фізики Харківського національного автомобільно-дорожнього університету;
- *Баранов Олег Олегович*, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем Національного аерокосмічного університету імені М.Є.Жуковського «Харківський авіаційний інститут»;
- *Ткачук Микола Анатолійович*, доктор технічних наук, професор, професор кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»;
- *Воронін Сергій Володимирович*, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри машинобудування та технічного сервісу машин Українського державного університету залізничного транспорту.

Перегон В.А., Воропай О.В., Коряк О.О., Єгоров П.А. Важільні механізми, передачі та зачеплення: навчальний посібник. Х.: ФОП Бровін О.В. 2025. 188 с. ISBN 978-617-8238-90-2

У посібнику викладені основні теоретичні положення, які необхідні під час самостійного вивчення курсу теорії механізмів і машин студентами як денної, так і заочної форм навчання, а також під час курсового проектування. Розглянуто питання структурного та кінематичного аналізу механізмів, а також наведено відомості з теорії зачеплення та про передачі. Посібник містить приклади розв'язання задач, на основі яких студенти можуть самостійно виконати відповідні етапи курсового проекту.

Наприкінці кожного з 4-х розділів наведені запитання, за якими студенти можуть самостійно перевірити набуті знання.

ISBN 978-617-8238-90-2

©В. А. Перегон, О. В. Воропай,
О. О. Коряк, П. А. Єгоров, 2025

ЗМІСТ

Розділ 1. СТРУКТУРНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ	6
1.1. Кінематичні пари та їх класифікація	6
1.2. Кінематичні ланцюги та їх класифікація.....	7
1.3. Число ступенів свободи просторового механізму.....	8
1.4. Число ступенів свободи плоского механізму. Формула Чебишева.....	10
1.5. Надлишкові зв'язки і рухливості.....	12
1.6. Заміна в механізмах вищих пар нижчими	15
1.7. Основний принцип утворення плоских важільних механізмів з нижчими парами.....	17
1.8. Класифікація важільних механізмів.....	19
1.9. Питання для самопідготовки за розділом.....	21
Розділ 2. КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ.....	22
2.1. Метод діаграм.....	22
а). Графічне диференціювання	22
б). Графічне інтегрування	25
в). Аналоги швидкостей і прискорень	26
г). Метод кінематичних діаграм	27
2.2. Метод планів.....	32
а). Рух твердого тіла.....	32
б). Теорема подібності для планів.....	37
2.3. Кінематичний аналіз груп Ассура.....	39
а). Група Ассура 2-го класу 1-го виду	39
б). Група Ассура 2-го класу 2-го виду	42
в). Група Ассура 2-го класу 3-го виду	45
г). Модифікація груп Ассура 2-го класу з поступальними парами.....	47
д). Кінематичний аналіз групи Ассура 3-го класу.....	48
2.4. Кінематичний аналіз важільних механізмів методом планів.....	55
а). Кривошипно-повзунний механізм (КПМ)	55
б). Шарнірний чотириланковий механізм	58

в). Кулісний механізм	61
2.5. Аналітична кінематика	66
2.6. Універсальний шарнір Гука	68
2.7. Подвійний шарнір Гука	72
2.8. Питання для самопідготовки за розділом.....	73
Розділ 3. ПЕРЕДАЧІ	75
3.1. Вступ до розділу.....	75
3.2. Класифікація зубчастих передач за розташуванням осей валів..	76
3.3. Основні параметри механічної передачі	80
3.4. Передатне відношення.....	81
а). Передатне відношення пари зубчастих коліс	82
б). Передатне відношення конічної передачі	83
в). Передатне відношення черв'ячної передачі	84
г). Багатоступінчасті передачі	85
д). Передачі із проміжними (паразитними) колесами.....	86
3.5. Планетарні передачі.....	88
а). Аналітична кінематика планетарних механізмів. Формула Вілліса	89
б). Основні схеми планетарних механізмів і їх характеристика	89
в). Особливості диференціальних планетарних механізмів	96
г). Графічна кінематика планетарних механізмів.....	98
д). Кінематика міжколісного диференціалу	104
е). Метричний синтез планетарних передач	106
3.6. Хвильова передача.....	115
3.7. Питання для самопідготовки за розділом.....	119
Розділ 4. ТЕОРІЯ ЗУБЧАСТОГО ЗАЧЕПЛЕННЯ	122
4.1. Основна теорема зачеплення	122
4.2. Евольвента та евольвентне зачеплення	125
а). Евольвента окружності та її властивості.....	125
б). Рівняння евольвенти.....	126
в). Евольвентне зачеплення.....	127
г). Теоретичний вихідний і виробляючий контури	129

д). Геометричні параметри евольвентного зубчастого колеса.....	131
е). Робоча ділянка ЛЗ. Активні ділянки профілів зубців.....	134
ж). Якісні показники евольвентного зачеплення.....	135
з). Зони одно- і двопарного зачеплення.....	142
4.3. Виготовлення зубчастих коліс.....	144
а). Метод копіювання	144
б). Метод обкатування.....	146
в). Мінімальне число зубців зубчастого колеса.....	149
г). Виготовлення зубчастих коліс зі зсувом інструмента	152
д). Визначення мінімально необхідного зсуву x_{\min}	154
4.4. Проектування безззорного зубчастого зачеплення	156
а). Нульова й позитивна передачі.....	156
б). Умова безззорного зачеплення.....	158
в). Товщина зубця колеса по ділильній окружності.....	159
г). Товщина зубця колеса по окружності довільного радіуса	159
д). Кут безззорного зачеплення	161
е). Міжосьова відстань безззорного зачеплення.....	162
ж). Зрівняльне зміщення.....	163
4.5. Косозубі колеса	164
а). Загальні відомості	164
б). Геометричні параметри косозубого колеса та зачеплення	167
в). Коефіцієнт перекриття косозубих коліс.....	168
г). Еквівалентне число зубців косозубого колеса.....	169
д). Сили в зачепленні косозубих циліндричних коліс	170
4.6. Конічні колеса	172
а). Геометричні параметри конічного колеса.....	174
б). Додаткові конуси. Еквівалентне число зубців конічного колеса.....	177
в). Сили в зачепленні прямозубих конічних коліс	179
г). Сили в зачепленні не прямозубих конічних коліс.....	180
4.7. Питання для самопідготовки за розділом.....	183

Розділ 1. СТРУКТУРНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ

1.1. Кінематичні пари та їх класифікація

Кінематична пара є рухомим з'єднанням двох ланок. Вільне тіло в просторі має 6 ступенів свободи або, іншими словами, його положення визначається 6 узагальненими координатами. При вході ланки в пару вона позбавляється частини ступенів свободи. Число заборонених рухів дорівнює $S = 1...5$, відповідно число ступенів свободи пари дорівнює $H = 6 - S = 5...1$. Пари поділяються на класи. Клас пари визначається числом заборонених рухів S (див. табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Кінематичні пари

№	Рисунок	Схема	Найменування	S	H	Клас
1			Куля - площина	1	5	I
2			Сферична	3	3	III
3			Сферична з пальцем	4	2	IV
4			Ролик - площина	2	4	II
5			Площинна	3	3	III
6			Циліндрична	4	2	IV
7			Поступальна	5	1	V
8			Гвинтова	5	1	V
9			Обертова	5	1	V
10			Кулачкова	4	2	IV
11			Зубчаста	4	2	IV

Крім того кінематичні пари поділяються на вищі та нижчі. Вищі пари – це такі, у яких ланки контактують у точці або по лінії (№1, 4, 10 і 11). У ниж-

чих парах ланки стикаються поверхнями (площина, сфера, циліндр). Розрізняють також просторові пари (№1÷4, 6, 8), та плоскі (№5, 7, 9÷11). Ланки плоских механізмів утворюють нижчі пари 5-го класу №7 та №9, а також вищі пари 4-го класу №10 та №11.

1.2. Кінематичні ланцюги та їх класифікація

Кінематичний ланцюг – це сукупність ланок, які утворюють кінематичні пари. Простий ланцюг – це такий ланцюг, в якому всі ланки входять не більше ніж у дві кінематичні пари (ліва колонка рис. 1), а складний – це коли є хоча б одна ланка, яка входить більш ні в 2 пари.

Відкритий ланцюг – це такий ланцюг, в якому є хоча б одна ланка, що входить тільки в одну кінематичну пару (нижній рядок на рис. 1.1).

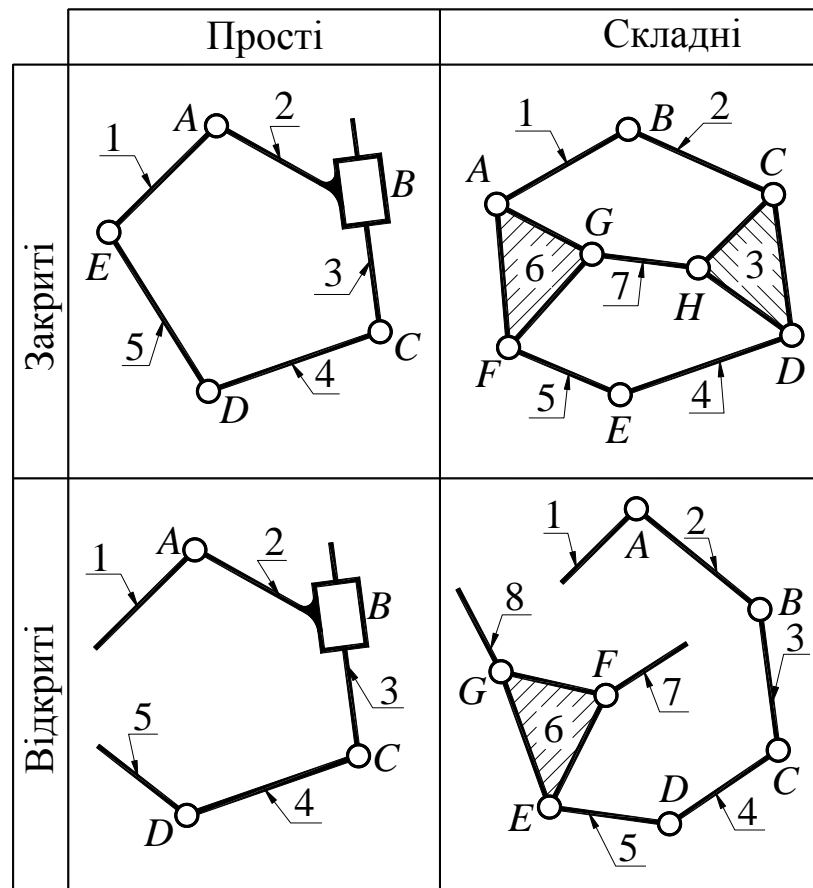


Рис. 1.1. Кінематичні ланцюги

Більшість механізмів можна розглядати як закритий кінематичний ланцюг з однією нерухомою ланкою (рис. 1.1). На рис. 1.2, а) показано плоский закритий ланцюг, що містить 4 ланки, які утворюють 3 обертальні пари і одну поступальну. Якщо в якості стояка прийняти ланку 4, то вийде кривошипно-повзунний механізм (рис. 1.2, б). Якщо ж за стояк прийняти ланку 1, то

отримаємо кулісний механізм (рис. 1.2, в) з кулісою, що обертається, оскільки $l_{AB} > l_{OA}$. Відкритий кінематичний ланцюг використовують для створення механізмів роботів і маніпуляторів.

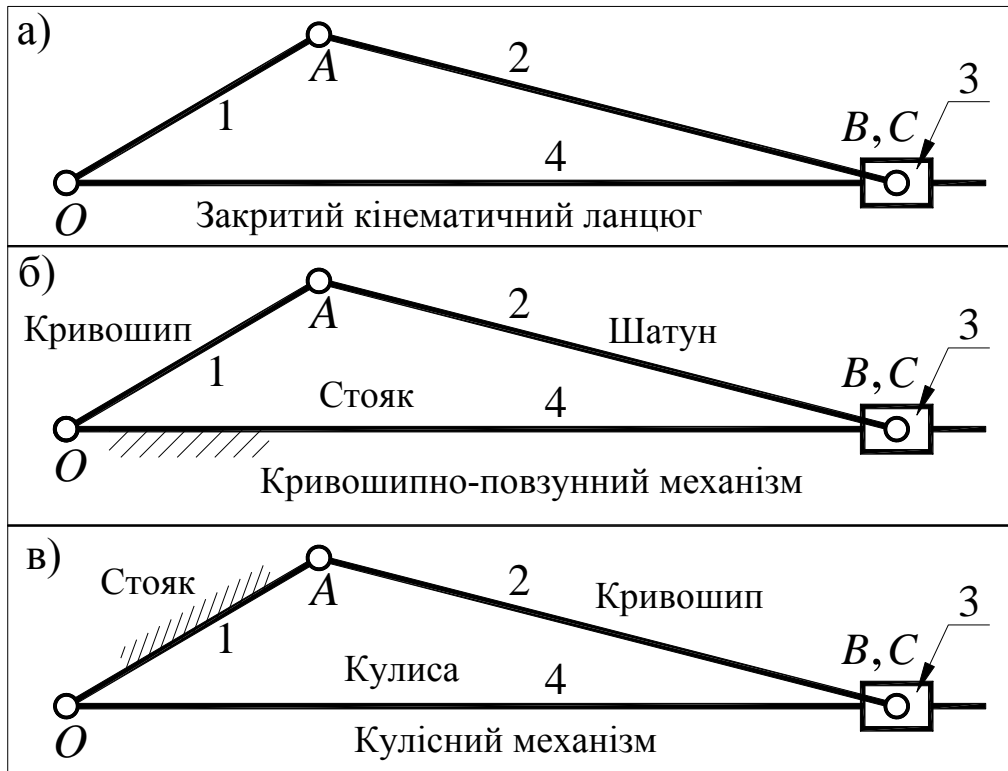


Рис. 1.2. Перетворення кінематичного ланцюга на механізм

1.3. Число ступенів свободи просторового механізму

Спочатку визначимо кількість ступенів свободи кінематичного ланцюга. Введемо наступні позначення:

- k – число ланок ланцюга;
- p_V – число пар 5-го класу;
- p_{IV} – число пар 4-го класу;
- p_{III} – число пар 3-го класу;
- p_{II} – число пар 2-го класу;
- p_I – число пар 1-го класу.

Якби всі k ланок були вільними тілами, то для визначення їх положень у просторі знадобилося $6 \cdot k$ координат. Кожна пара ланцюга забирає певну кількість ступенів свободи: пара 5-го класу забирає 5 ступенів свободи, 4-го класу – 4 і т. д. Тоді число ступенів свободи просторового ланцюга дорівнюватиме

$$W_n = 6k - 5p_v - 4p_{IV} - 3p_{III} - 2p_{II} - p_I. \quad (1.1)$$

Як вище було зазначено, механізм – це ланцюг із однією нерухомою ланкою. Тоді число ступенів просторового механізму дорівнюватиме $W = W_n - 6$. Після підстановки в цю формулу виразу (1.1) отримаємо

$$W = 6n - 5p_v - 4p_{IV} - 3p_{III} - 2p_{II} - p_I, \quad (1.2)$$

де $n = k - 6$ – число рухомих ланок механізму.

Формула (1.2) зветься формулою Сомова-Малишева. Вперше ця формула була дана П. І. Сомовим у 1887 році, а у 1923 році А. П. Малишев надав їй остаточного вигляду.

Приклад 1. Визначити число ступенів свободи W і маневреність m механізму промислового робота за схемою на рис. 1.3.

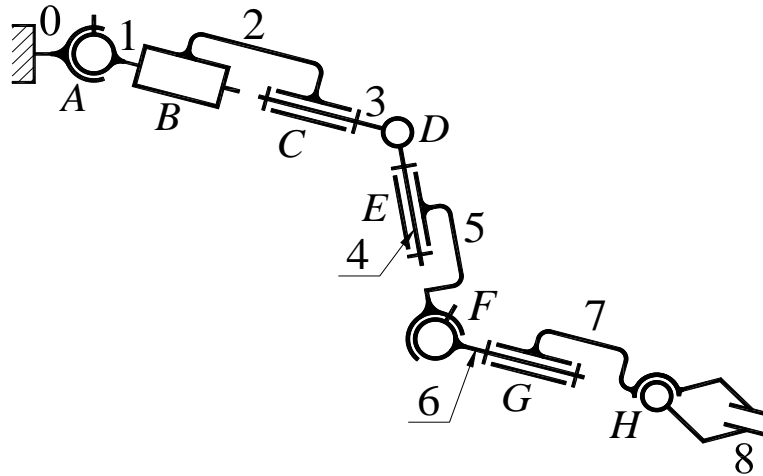


Рис. 1.3. Механізм маніпулятора

Під маневреністю m механізму робота або маніпулятора розуміється число його ступенів свободи при нерухомому захваті.

Розв'язання

1. Нумерація ланок показує, що число рухомих ланок $n = 8$.
2. Ланки утворюють:
 - дві кінематичні пари 4-го класу: 0-1 і 5-6, що називаються сферичними з пальцем;
 - шість кінематичних пар 5-го класу: одна поступальна (1-2) і п'ять обертальних (2-3, 3-4, 4-5, 6-7, 7-8).
3. За формулою Сомова-Малишева знайдемо ступінь рухливості механізму

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 = 6 \cdot 8 - 5 \cdot 6 - 4 \cdot 2 = 10.$$

З отриманих 10 ступенів свободи один призначений для захвату робочого тіла, тому прийнято визначати число ступенів свободи робота при зімк-

нутому захваті 8. Якщо захват вважати зімкнутим, тоді $n = 7$; $p_5 = 5$; $p_4 = 2$, а число ступенів свободи робота

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 = 6 \cdot 7 - 5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 9.$$

4. Визначимо маневреність m механізму промислового робота.

Будемо вважати захват нерухомим. При цьому ланки 7 і 8 зіляються зі стояком.

Розрахунок здійснимо за тією ж формулою Сомова-Малишева, попередньо порахувавши $n = 6$, $p_5 = 5$ (1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 6-7); $p_4 = 2$ (0-1, 5-6).

Тоді

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 3.$$

Відповідь: $W = 9$; $m = 3$.

Серед просторових механізмів є такі, у яких на рух всіх ланок накладається одне або більше загальних обмежень. Для урахування цих обмежень застосовуються структурні формули, що походять з формули Сомова-Малишева за рахунок зменшення всіх чисельних коефіцієнтів на число загальних обмежень і відкидання членів правої частини, що відповідають неіснуючим кінематичним парам.

1.4. Число ступенів свободи плоского механізму. Формула Чебишева

Вільне тіло на площині має три ступені свободи, тобто при входженні ланки в пару на площині воно позбавляється або одного або двох ступенів свободи. Отже, у плоских механізмах можуть бути лише однорухливі та дворухові пари. За загальною класифікацією це відповідно пари 5-го та 4-го класів. Пари 5-го класу – це нижчі пари (обертальна та поступальна). Плоскі пари 4-го класу – це вищі пари, наприклад, зубчаста та кулачкова. Застосувавши, розглянуту вище методику визначення числа ступенів свободи для просторового механізму, число ступенів свободи плоского механізму дорівнюватиме

$$W = 3n - 2p_V - p_{IV}. \quad (1.3)$$

Оскільки $p_V = p_H$, а $p_{IV} = p_B$, тоді отримаємо

$$W = 3n - 2p_H - p_B. \quad (1.4)$$

Формула (1.4) зветься формулою Чебишева.

Ми розглянули два випадки: коли у просторі можливі всі 6 рухів і коли можливі лише 3 рухи. У загальному випадку існують простори, в яких вільне тіло може мати число ступенів свободи від 2-х до 6-ти, тобто окрім тих, які ми розглянули (6 і 3), можливі простори, в яких число ступенів свободи може

бути 5, 4 і 2. Для кожного з таких просторів застосовується відповідна формула для визначення числа ступенів свободи механізму

$$\begin{aligned}
 W &= 6n - 5p_V - 4p_{IV} - 3p_{III} - 2p_{II} - p_I; \\
 W &= 5n - 4p_V - 3p_{IV} - 2p_{III} - p_I; \\
 W &= 4n - 3p_V - 2p_{IV} - p_{III}; \\
 W &= 3n - 2p_V - p_{IV}; \quad (W = 3n - 2p_H - p_B); \\
 W &= 2n - 1p_V; \quad (W = 2n - p_H).
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Приклад 2. Визначити число ступенів свободи механізму хитного конвеєра (рис. 1.4).

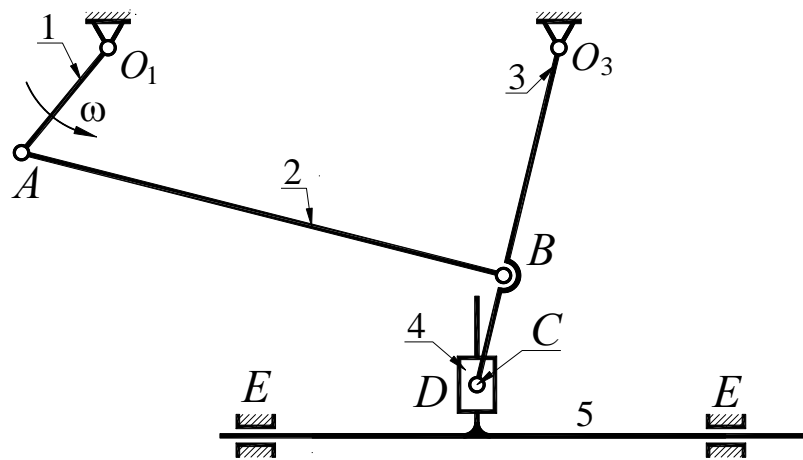


Рис. 1.4. Механізм хитного конвеєра

У механізмі 5 рухомих ланок. На рисунку вони позначені відповідними номерами. З ланкою 5 з'єднується платформа транспортування вантажів. Ланки утворюють 5 обертальних пар (A, B, C, O_1, O_3) і дві поступальні пари: пара D , яка утворена ланками 4 і 5 і пара E , що утворена ланкою 5 і стояком.

Усі ці пари нижчі, 5-го класу. Вищих пар немає. Таким чином $n = 5$, $p_H = 7$, $p_B = 0$.

Число ступенів свободи дорівнює

$$W = 3n - 2p_H - p_B = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1.$$

Приклад 3. Визначити кількість ступенів свободи механізму клинового пресу (рис. 1.5). На рис. 1.5, а) показана конструктивна схема механізму, а на рис. 1.5, б) – кінематична. Це триланковий механізм із двома рухомими ланками: вхідною 1 і вихідною 2. У механізмі можливі лише поступальні рухи, тобто у такому механізмі можуть існувати лише поступальні пари A, B, C (однорухливі). Число ступенів свободи такого механізму визначається за формулою Добровольського

$$W = 2n - p_n,$$

де $n = 2$, $p_n = 3$.

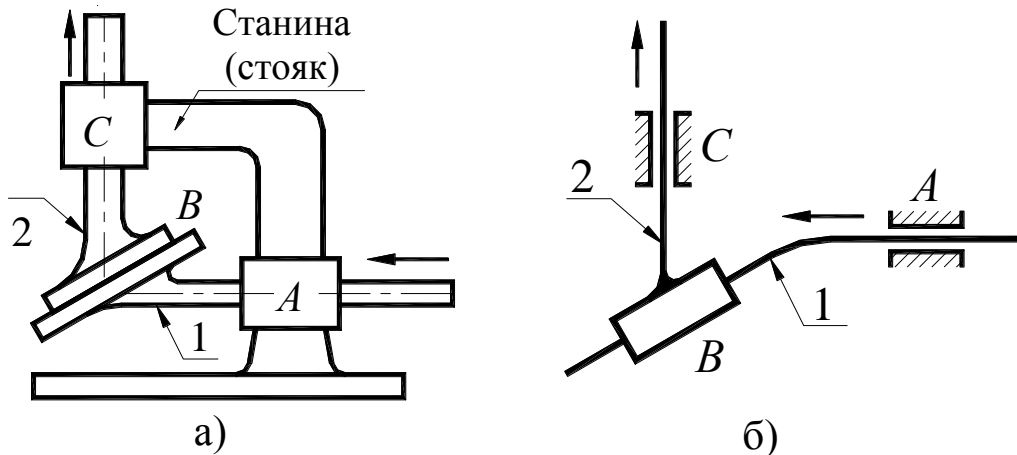


Рис. 1.5. Клиновий прес

Таким чином число ступенів свободи механізму

$$W = 2n - p_n = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

1.5. Надлишкові зв'язки і рухливості

На рис. 1.6 представлено планетарний механізм Джемса, до складу якого входять наступні ланки: колесо 3 з внутрішніми зубцями, яке є нерухомим (стояк), сонячне колесо 1, водило h і три сателіти 2, 2' і 2''. В механізмі 5 рухомих ланок (1, h , 2, 2' і 2''), тобто $n = 5$. Ланки утворюють шість вищих пар 4-го класу і 5 нижчих обертальних пар. Сателіти з центральними колесами 1 і 3 утворюють по три вищі кінематичні пари: з колесом 1 – D , D' , D'' і з колесом 3 – C , C' і C'' відповідно. З водилом h сателіти утворюють 3 обертальні пари – A , A' і A'' . Окрім того, ланка 3 (стояк) з ланкою 1 утворює обертальну пару O , а з водилом h таку ж пару B .

Узагальнюючи зазначене, маємо

- кількість рухомих ланок – $n = 5$;
- кількість нижчих кінематичних пар – $p_n = 5$;
- кількість вищих кінематичних пар – $p_v = 6$.

Знаходимо кількість ступенів свободи

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_n - p_v = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 6 = -1.$$

Отримана відповідь не правильна. Цей механізм при $\omega_3 = 0$ має $W = 1$.

Якщо не враховувати сателіти 2' і 2'' і їхні зв'язки (нижчі пари A' і A'' і вищі пари C' , C'' , D' , D''), тоді

- кількість рухомих ланок – $n = 3$;

- кількість нижчих кінематичних пар $- p_n = 3$;

- кількість вищих кінематичних пар $- p_v = 2$,

відповідно

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_n - p_v = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1 - \text{відповідь правильна.}$$

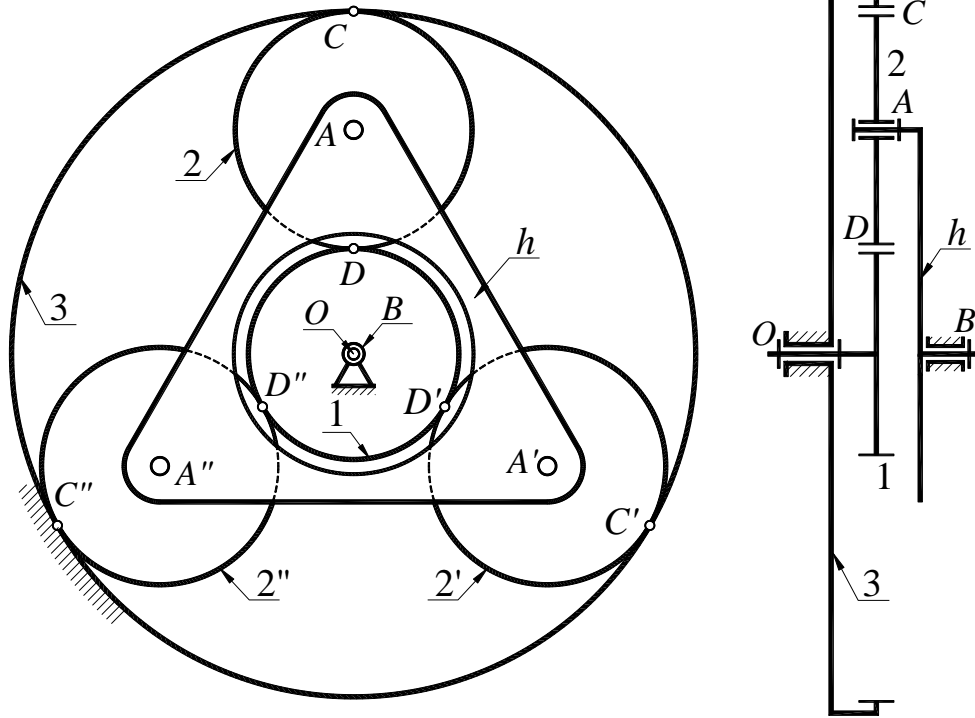


Рис. 1.6. Планетарний механізм Джемса

З точки зору кінематики механізму в ньому достатньо мати один сателіт. Два додаткових сателіта не накладають додаткових зв'язків на рух ланок, тобто є пасивними зв'язками. В ряді механізмів використовують пасивні зв'язки для покращення роботи механізму або підвищення навантажувальної здатності, як це застосовується в планетарних механізмах. Характерним прикладом використання надлишкових зв'язків є їх застосування в механізмах паралелограма, коли вхідна і вихідна ланки рухаються з однаковою швидкістю і в критичному положенні обидві ланки і шатун розташовуються на одній прямій. З цього положення вхідна і вихідна ланки можуть почати обертатись в протилежних напрямках. Якщо в такому механізмі накласти пасивний зв'язок (або до вхідної ланки, або до шатуна), то така можливість виключається.

Таким чином пасивними зв'язками називаються такі, які не накладають додаткових обмежень на рух ланок механізму.

Для утворення надлишкового зв'язку необхідно паралельно вищій парі під'єднати зв'язок з допомогою додаткової ланки і двох пар 5-го класу так, щоб не накладались додаткові обмеження на рух ланок механізму.

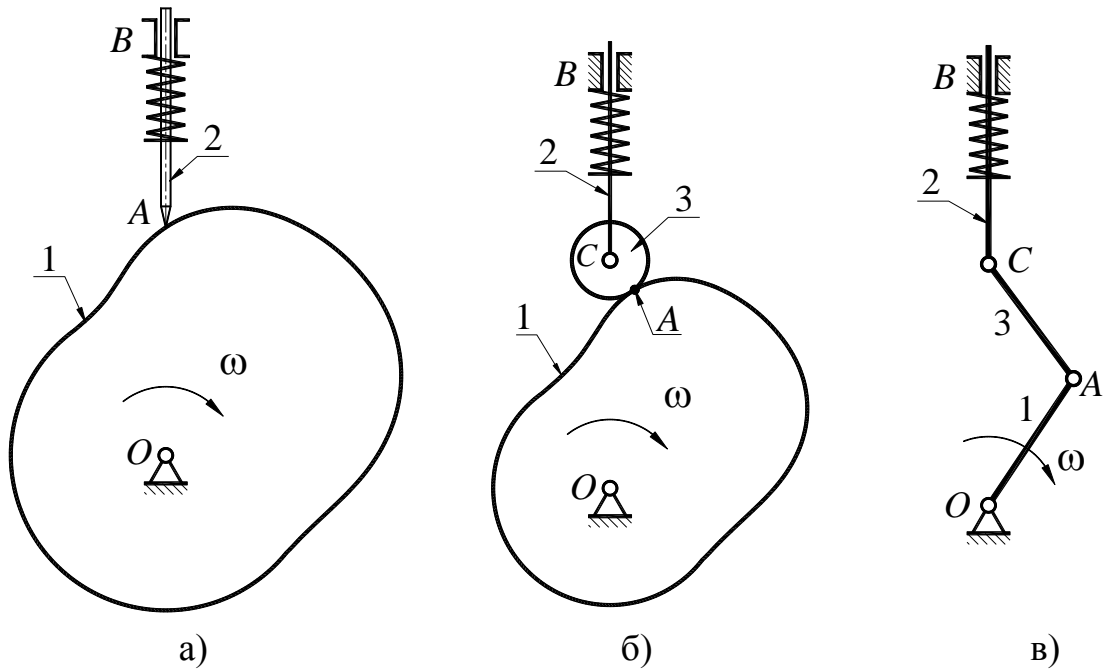


Рис. 1.7. Кулачковий механізм з роликівим штовхачем

На рис. 1.7 показано три варіанта одного і того ж кулачкового механізму. На рис. 1.7, а) наведено кулачковий механізм з загостреним штовхачем. З відомих причин механізм з загостреним штовхачем практично ніколи не використовується. Для усунення тертя ковзання між штовхачем і кулачком застосовується роликівий штовхач (рис. 1.7, б).

Механізм з загостреним штовхачем має $W = 1$, тобто надлишкові рухливості відсутні. Визначимо W механізму з роликівим штовхачем. В цьому механізмі

- кількість рухомих ланок $n = 3$ (кулачок, штовхач, ролик);
- кількість нижчих кінематичних пар $p_n = 3$ (O , B , C);
- кількість вищих кінематичних пар $p_v = 1$ (A),

тоді

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_n - p_v = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2 - \text{відповідь правильна.}$$

Дійсно в цьому механізмі $W = 2$: одна рухливість основна – незалежний поворот кулачка, а друга локальна – незалежний поворот ролика навколо центра C (це надлишкова рухливість). На рис. 1.7, в) показано механізм з нижчими парами, який заміняє механізм з роликівим штовхачем. Слід відмітити, що механізм є заміняючим лише для окремого визначеного положення.

Таким чином при визначенні W механізму за формулою Чебишева необхідно виключити з розгляду надлишкові зв'язки і визначити наявність надлишкових рухливостей.

1.6. Заміна в механізмах вищих пар нижчими

Ланки плоских механізмів утворюють нижчі пари 5-го класу (поступальні і обертальні), а також вищі пари 4-го класу. При вивченні структури і кінематики плоских механізмів в ряді випадків краще замінити вищі пари нижчими обертовими і поступальними парами. Після такої заміни повинні залишитись незмінними кінематика і число ступенів свободи.

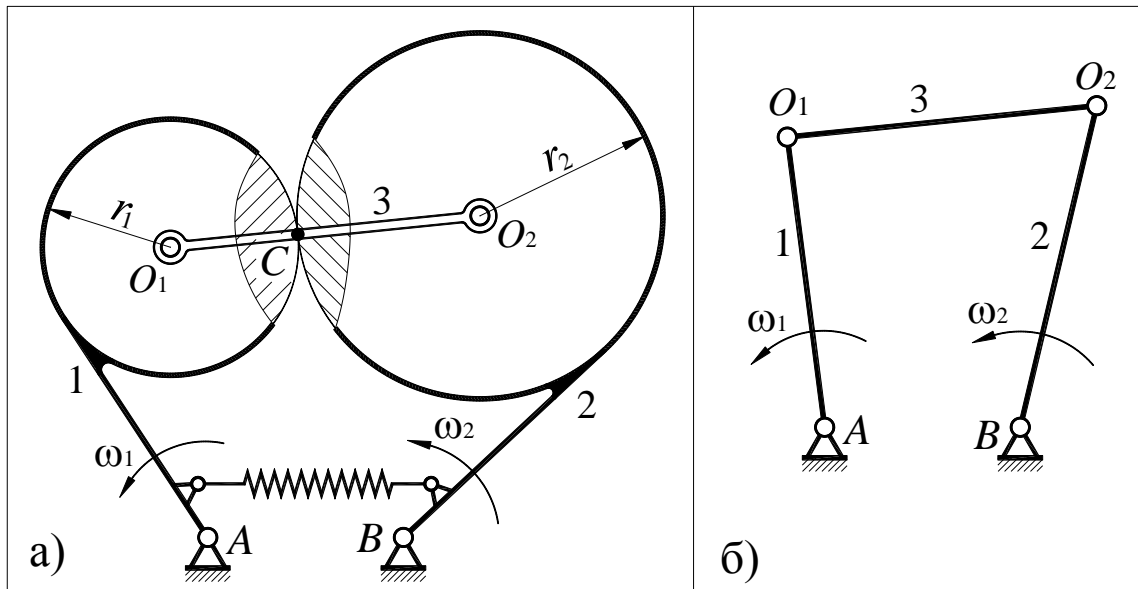


Рис. 1.8. Побудова замінюючого механізму

На рис. 1.8 ланки 1 і 2 у вигляді круглих дисків утворюють вищу кінематичну пару C з силовим замиканням з допомогою пружини. В процесі руху механізму міжцентрова відстань $O_1O_2 = r_1 + r_2$ залишається незмінною, тому зв'язок, накладений додатковою ланкою 3 буде пасивним (ланка 3 з'єднана з ланками 1 і 2 шарнірно в центрах кругів O_1 і O_2). Якщо вищу пару C виключити, вирізавши частини ланок 1 і 2 (на рис. 1.8 заштриховані частини), то отримуємо замінюючий механізм з нижчими парами (рис. 1.8, б). Утворений замінюючий механізм замінює механізм з вищою парою C у всіх положеннях, тобто він є постійно замінюючим.

Розглянемо побудову замінюючого механізму, коли він замінює механізм з вищою парою тільки в даному положенні. На рис. 1.9 тарілка кулачка торкається профіля кулачка в точці A (в дійсності контакт по лінії). Точка C – центр кривизни профіля кулачка в точці A профіля, а ρ – радіус кривизни.

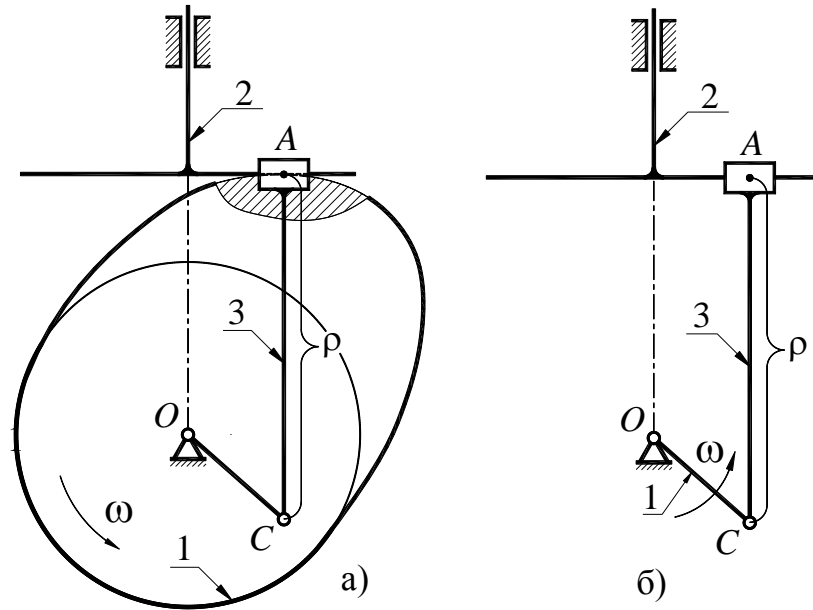


Рис. 1.9. Кулачковий механізм з плоским тарілчастим штовхачем

Якщо паралельно вищій парі A приєднати зв'язок, утворений додатковою ланкою 3 з обертовою парою C і поступальною A_{2-3} , то такий зв'язок не буде перешкоджати руху механізму, якщо контакт штовхача з кулачком буде проходити в околиці точки A . Якщо в околиці точки A кривизна змінна, то такий зв'язок буде пасивним тільки для даного положення. На рис. 1.9, б) показано механізм з нижчими парами, який заміняє кулачковий механізм з вищою парою (рис. 1.9, а).

В механізмі з вищими парами

- кількість рухомих ланок $n = 2$;
- кількість нижчих кінематичних пар $p_n = 2$;
- кількість вищих кінематичних пар $p_v = 1$,

тоді

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_n - p_v = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

В механізмі з нижчими парами

- кількість рухомих ланок $n = 3$;
- кількість нижчих кінематичних пар $p_n = 4$;
- кількість вищих кінематичних пар $p_v = 0$,

тоді

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_n - p_v = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Висновок: кінематика і рухливість співпадають.

1.7. Основний принцип утворення плоских важільних механізмів з нижчими парами

Л. В. Ассур сформулював принцип утворення плоских важільних механізмів, як наступний: будь-який механізм можна утворити шляхом нашарування на вихідний механізм (ВМ) груп Ассура.

Існує всього 2 вихідні механізми (див. рис. 1.10).

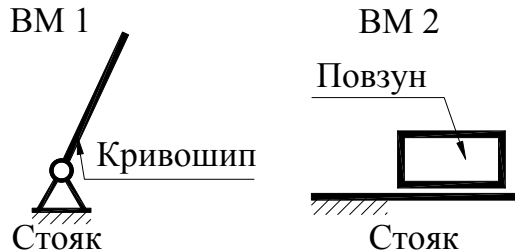


Рис. 1.10. Вихідні механізми

Група Ассура – це кінематичний ланцюг, що має нульову рухливість відносно тих ланок, до яких вона приєднується. Оскільки в цьому випадку $p_v = 0$, тоді

$$W = 3n - 2p_n = 0. \quad (1.6)$$

З формули (1.6) маємо $3n = 2p_n$, тобто $p_n = 1,5 \cdot n$. Отже, n повинно бути парним числом. Можливі поєднання чисел ланок групи Ассура та кінематичних пар наведено в таблиці нижче.

Таблиця 1.2

Можливі сполучення кількості ланок n і пар p_n в групі Ассура

n	2	4	6	8	..
p_n	3	6	9	12	...

У сучасній техніці найбільшого поширення набули механізми, побудовані з груп Ассура, у яких $n = 2$. Такі групи називають двоповідковими групами Ассура. Найпростіша двоповідкова група з трьома обертальними парами має коротку назву – група 1-ого виду (див. рис. 1.11). Якщо таку групу приєднати до стояка, вийде ферма ($W = 0$), тобто цей ланцюг має нульову рухливість відносно тих ланок, до яких вона приєднується. Інші види двоповідкових груп Ассура можна отримати шляхом заміни обертальних пар на поступальні (див. рис. 1.11).

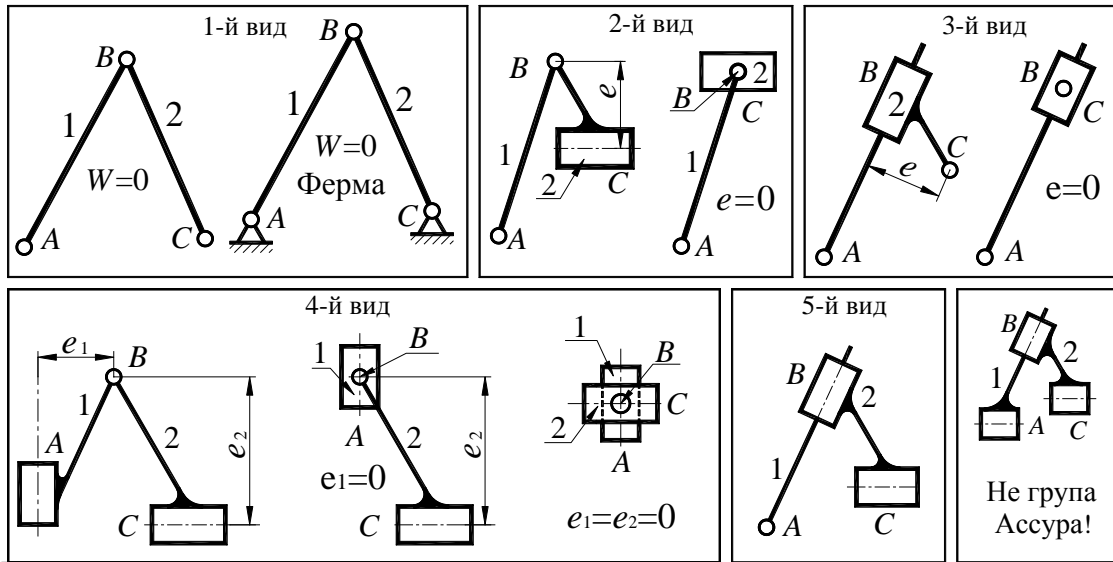


Рис. 1.11. Двоповідкові групи Ассура

Якщо у двоповідковій групі всі обертальні пари замінити поступальними, такий ланцюг не матиме $W = 0$ (див. рис.1.5, прикладу 3). З наведеного рисунка 1.11 бачимо, що є 5 видів двоповідкових груп Ассура. У техніці найчастіше застосовуються перші 3 види. Важливо, що при застосуванні груп Ассура з поступальними парами зазвичай зміщення осі поступальної пари відносно центру шарніра даної ланки роблять рівним нулю, тобто $e_i = 0$. Групи Ассура 2-÷5-ого видів, у яких $e_i \neq 0$, практично не застосовуються, оскільки в цьому випадку значно погіршуються умови роботи механізму з точки зору передачі руху між ланками, які утворюють поступальну пару. Такі групи Ассура застосовуються тільки у випадках, коли групу з $e_i = 0$ застосувати в даному механізмі не можливо.

Усі групи Ассура поділяються на класи. Усі двоповідкові групи (рис. 1.11) відносяться до другого класу. Клас груп вище 2-го визначається за кількістю сторін найбільш складного замкненого контуру.

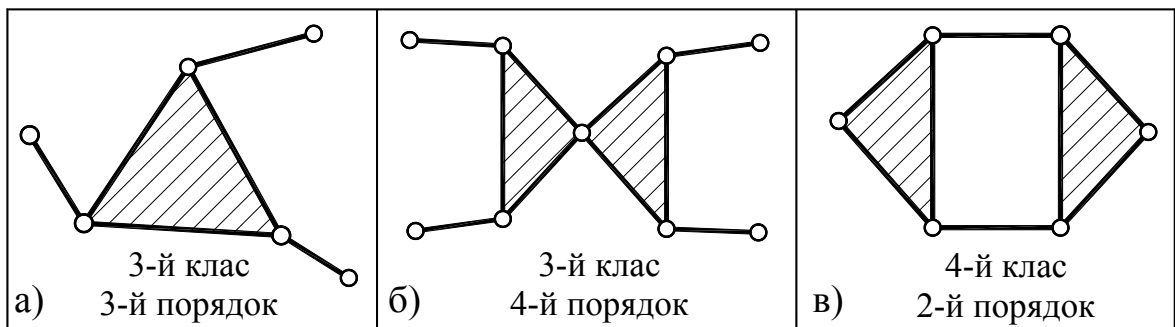


Рис. 1.12. Приклади груп Ассура 3-го та 4-го класів

На рис. 1.12 наведено приклади груп Ассура 3-го та 4-го класів. Окрім класу відмінною особливістю групи є її порядок – число елементів, за допомогою яких вона приєднується до механізму. Так усі двоповідкові групи Ассура мають 2-й порядок.

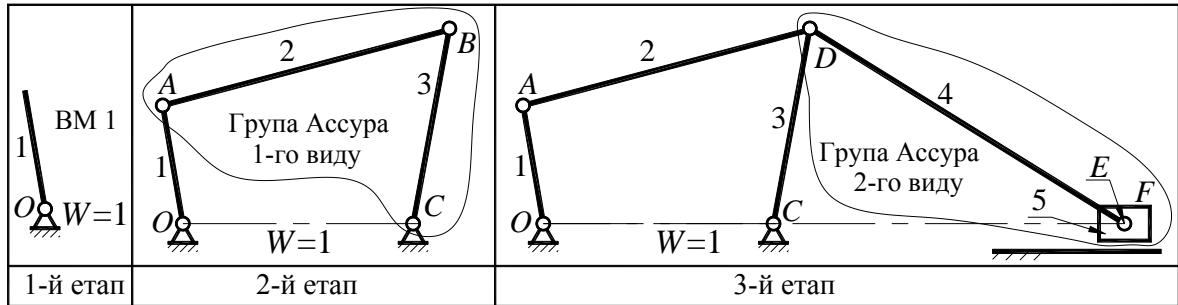


Рис. 1.13. Нашарування груп Ассура при створенні механізму з $W = 1$

При нашаруванні груп Ассура на механізм число ступенів свободи не змінюється (див. рис. 1.13). Це означає, що число ступенів свободи механізму визначається числом вихідних механізмів. Якщо, наприклад, необхідно створити механізм з двома ступенями свободи, то необхідно використати два вихідних механізми (див. рис. 1.14).

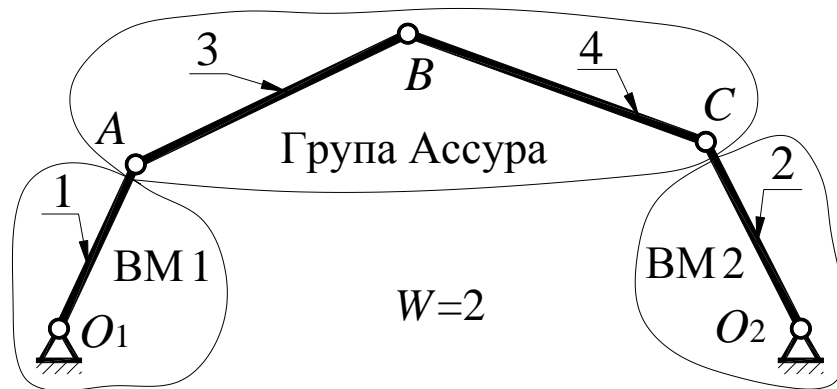


Рис. 1.14. Створення механізму з двома ступенями свободи

1.8. Класифікація важільних механізмів

Механізми також поділяються на класи. До першого класу віднесено вихідний механізм. До другого класу належать механізми, побудовані тільки з двоповідкових груп Ассура. Клас механізму вище другого визначається класом найстаршої групи Ассура. Слід зазначити, що клас механізму залежить від вибору вхідної ланки. На рисунку 1.15 показаний п'ятиланковий механізм з одним ступенем свободи.

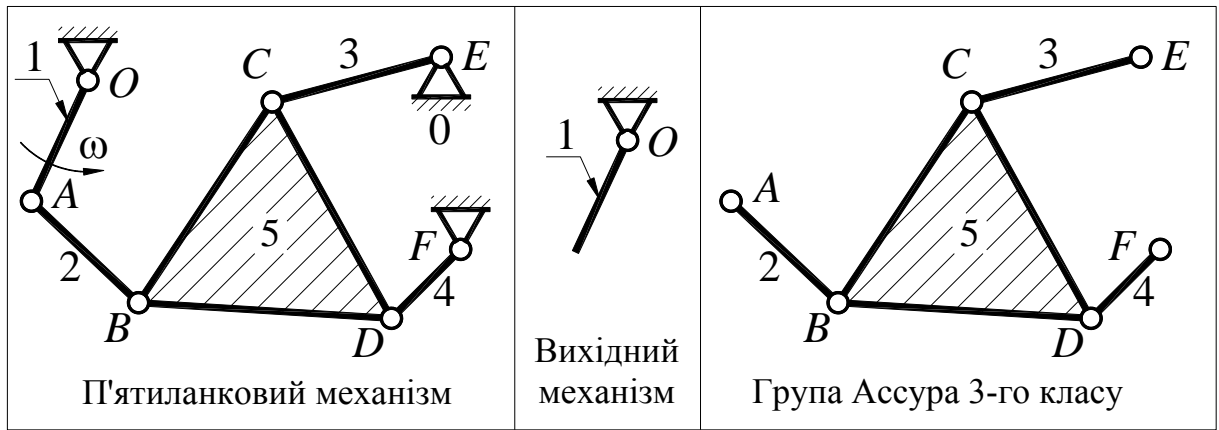


Рис. 1.15. П'ятиланковий механізм 3-го класу і його складові

Якщо в якості вхідної ланки вибрати ланку 1 (див. рис. 1.15), то у складі такого механізму є вихідний механізм (кривошип 1 і стійка) і група Ассура 3-го класу. Це буде механізм 3-го класу. Його структура відображається формулою

$$I(0, 1) \rightarrow III(2, 3, 4, 5) \quad (1.7)$$

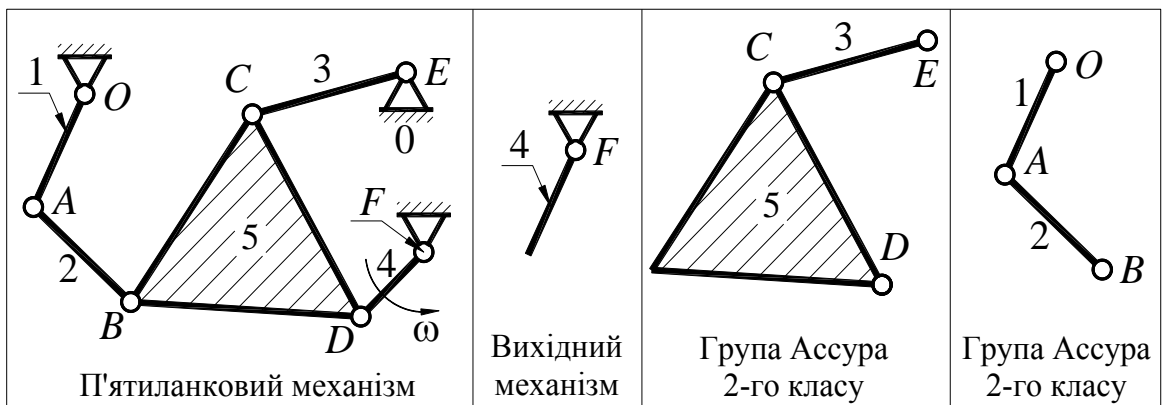


Рис. 1.16. П'ятиланковий механізм 2-го класу і його складові

Якщо ж в якості вхідної ланки вибрати ланку 4 (рис. 1.16), у складі такого механізму є вихідний механізм (кривошип 4 і стійка) і дві групи Ассура 2-го класу. Тоді це буде механізм 2-го класу. Його структура відображається формулою

$$I(0, 4) \rightarrow II(3, 5) \rightarrow II(1, 2) \quad (1.8)$$

Необхідно відзначити, що класифікація механізмів Ассура кардинально спрощує проведення як кінематичного, так і силового аналізу плоских важільних механізмів, а враховуючи можливість заміни в механізмах вищих пар нижчими, таку класифікацію можна використати і для таких механізмів, що мають у складі вищі кінематичні пари. Як кінематичний, так і силовий аналізи проводяться по групам Ассура, які є статично визначеними ланцюгами.

Кінематичний аналіз проводиться в послідовності зборки механізму, починаючи з кривошипа, а силовий – в протилежній послідовності. Кількість найбільш розповсюджених груп Ассура не велика, причому це в основному групи Ассура 2-го класу. Досить освоїти методики кінематичного і силового аналізу цих груп, щоб успішно проводити такі аналізи для всіх механізмів побудованих з цих груп. Слід також відзначити, що проводити кінематичний і силовий аналіз груп Ассура 2-го класу достатньо просто на відміну від груп 3-го, а тим більше 4-го класу.

1.9. Питання для самопідготовки за розділом

1. Що вивчається в курсі теорії механізмів і машин?
2. Чим відрізняються аналіз і синтез механізмів?
3. Дайте визначення наступних понять: механізм, машина, ланка, кінематична пара, кінематичний ланцюг.
4. Як називаються ланки важільних механізмів і чому?
5. Що являє собою кінематична схема?
6. Що таке надлишкові зв'язки?
7. По яких ознаках класифікують кінематичні пари?
8. Як визначається клас кінематичної пари?
9. Які кінематичні пари називаються вищими та нижчими?
10. Як здійснюється замикання кінематичних пар?
11. Які різновиди кінематичних ланцюгів Ви знаєте?
12. Які структурні формули механізмів Ви знаєте і чиє ім'я вони носять?
13. Запишіть формулу Чебишева і визначте з її допомогою число ступенів свободи будь-якого плоского механізму.
14. Які механізми називаються "плоскими" і чому?
15. Що таке початковий механізм?
16. Які кінематичні ланцюги називаються структурними (групами Ассура)?
17. Чим визначається клас групи Ассура?
18. Як визначається порядок групи Ассура?
19. Як визначається клас механізму?
20. У якому напрямку за схемою слід здійснювати кінематичний аналіз будь-якого важільного механізму?
21. Яка послідовність виконання силового аналізу важільного механізму?

Розділ 2. КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ

Кінематичний аналіз механізму включає такі головні задачі:

1. Визначення положень ланок механізму, траєкторій окремих точок і крайніх положень вихідної ланки.
2. Визначення швидкостей точок і ланок механізму.
3. Визначення прискорень точок і ланок механізму.

Задачу кінематичного аналізу можна розв'язувати з переважанням або аналітичних розрахунків, або графічних побудов. У навчальному процесі доцільно застосовувати графічні та графоаналітичні методи кінематичного аналізу механізмів. Вони мають високу наочність, легко засвоюються, мають точність, характерну для інженерних розрахунків, тому в посібнику цим методам буде надана перевага.

Аналітичні методи розв'язання задач більш трудомісткі, потребують спеціальних математичних знань, не наочні. У навчальній практиці вони знайшли обмежене застосування. Позитивною рисою аналітичних методів кінематичного аналізу механізмів є їхня висока точність, чим і виправдовується широке застосування аналітичних розрахунків в окремих специфічних випадках.

2.1. Метод діаграм

План швидкостей або прискорень (див. підрозділ 2.2) відображає значення швидкостей або відповідно прискорень усіх характерних точок механізму в даному положенні (в окремий момент часу). Якщо потрібно одержати інформацію про рух окремої ланки або точки, застосовується метод діаграм. Попередньо розглянемо низку питань, які необхідно засвоїти для застосування методу кінематичних діаграм.

а). Графічне диференціювання

На рис. 2.1 наведено графік залежності $S = S(t)$. Необхідно графічно визначити швидкість у точці А.

За визначенням швидкість дорівнює

$$V = \frac{dS}{dt}. \quad (2.1)$$

Нагадаємо геометричний зміст похідної: похідна пропорційна тангенсу кута нахилу дотичної. На рис. 2.1 $\tau\tau$ – це дотична до графіка $S = S(t)$ в точці А, dx – збільшення аргументу t , а dy – лінійна частина збільшення функції S . Із графіка маємо, що

$$\begin{aligned} dt &= dx \cdot \mu_t, \\ dS &= dy \cdot \mu_s. \end{aligned} \quad (2.2)$$

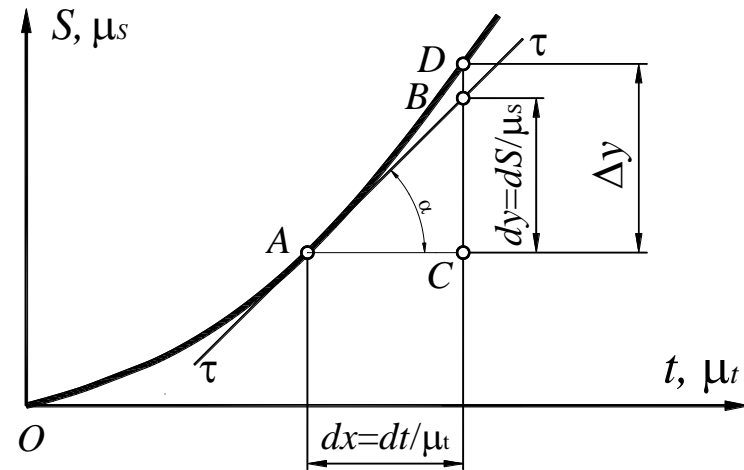


Рис. 2.1. Графік залежності шляху від часу

Після підстановки (2.2) в (2.1) одержимо

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{dy \cdot \mu_s}{dx \cdot \mu_t} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\mu_s}{\mu_t}. \quad (2.3)$$

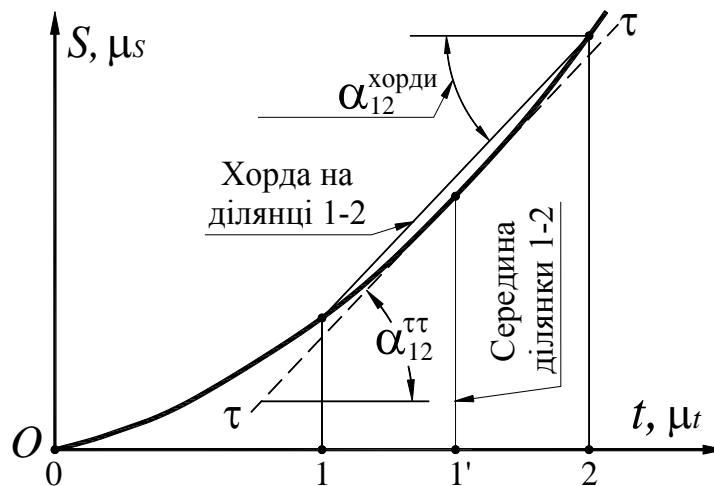


Рис. 2.2. Метод хорд

Використовуючи вираз (2.3) можна визначити швидкість в окремій точці, але застосування цієї формули для побудови графіку $V = V(t)$ є досить трудомістким.

Для побудови графіків $V = V(t)$ та $a = a(t)$ доцільно застосовувати методи графічного диференціювання. Серед таких методів метод дотичних і метод хорд. При використанні методу дотичних необхідно для ряду значень часу провести дотичні до графіка $S = S(t)$, що доволі важко зробити з достатньою точністю. Більш зручним є метод хорд (рис.2.2).

Сутність цього методу полягає в наступному. Відомо, що на будь-якій ділянці кривої є така точка, в якій кут нахилу дотичної дорівнює куту нахилу хорди на цій ділянці. Так на ділянці 1-2 (рис. 2.2) кут нахилу хорди $\alpha_{12}^{\text{хорди}}$ дорівнює куту нахилу дотичної $\tau\tau$ в точці $1'$, проведеної до кривої на тій же ділянці $\alpha_{12}^{\tau\tau}$.

Робиться припущення, що точка кривої, в якій кут нахилу дотичної дорівнює куту нахилу хорди, розташована на середині ділянки (на рис. 2.2 це точка $1'$), тобто ми визначаємо похідну на середині розглянутої ділянки. Слід відмітити, що прийняте припущення про рівність $\alpha_{12}^{\text{хорди}} = \alpha_{12}^{\tau\tau}$ на середині ділянки вносить деяку похибку.

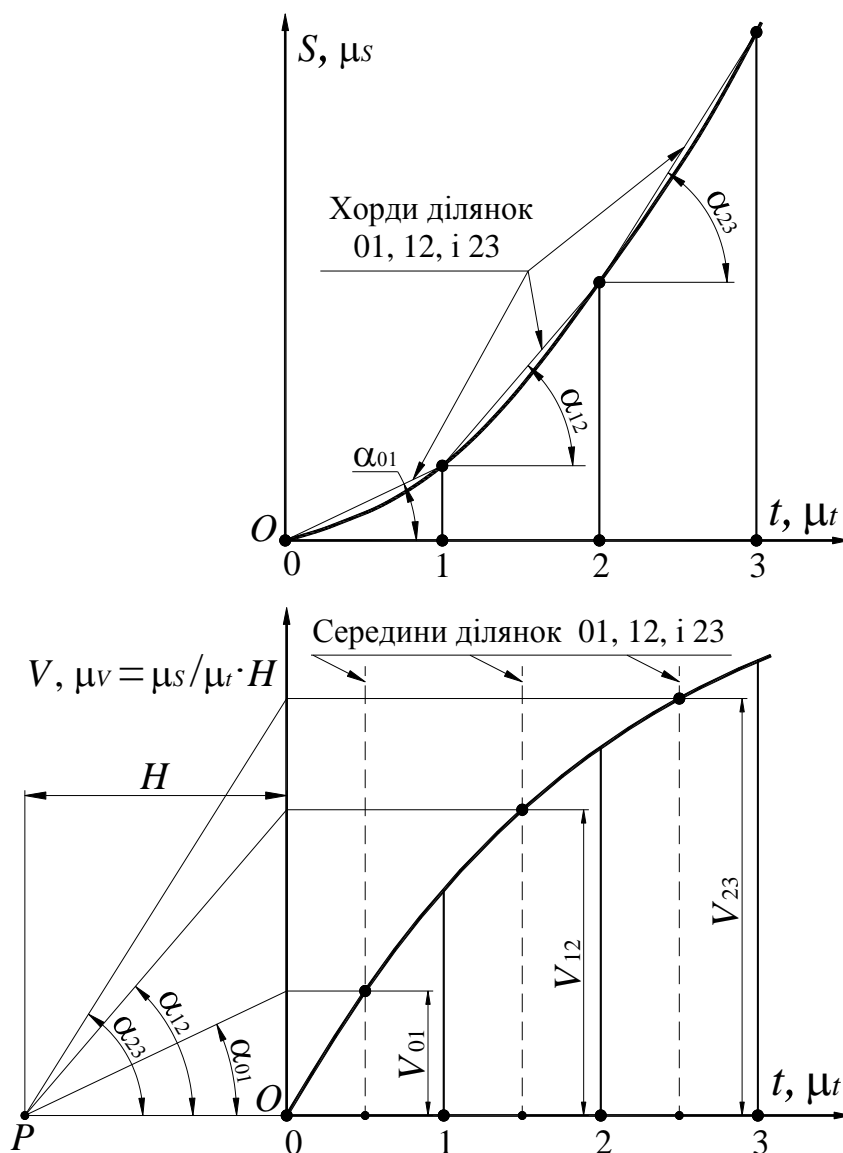


Рис. 2.3. Графічне диференціювання методом хорд

Розглянемо послідовність графічного диференціювання методом хорд. На рис. 2.3 маємо графік $S = S(t)$, продиференціювавши який, отримаємо гра-

фік $V = V(t)$. Розділяємо вісь часу на ділянки, вибравши певний крок. На ділянках 0-1, 1-2 і т. д. проводимо хорди (рис. 2.3, верхня частина). Кути нахилу хорд позначаємо α_{01}, α_{12} і т. д. Будуємо систему координат для графіка $V = V(t)$ з відповідними ділянками на осі часу й обираємо полюсну відстань $OP = H$. З полюса P проводимо промені під кутами нахилу хорд α_{01}, α_{12} і т. д. до перетину їх з віссю ординат. На осі ординат відтинаються відрізки, що зображують у масштабі величини швидкостей на серединах відповідних ділянок V_{01}, V_{12} і т. д. Переносимо ці відрізки на середини (на рис. 2.3 показані пунктирними лініями) ділянок 0-1, 1-2 і т. д. і одержуємо точки графіка $V = V(t)$.

б). Графічне інтегрування

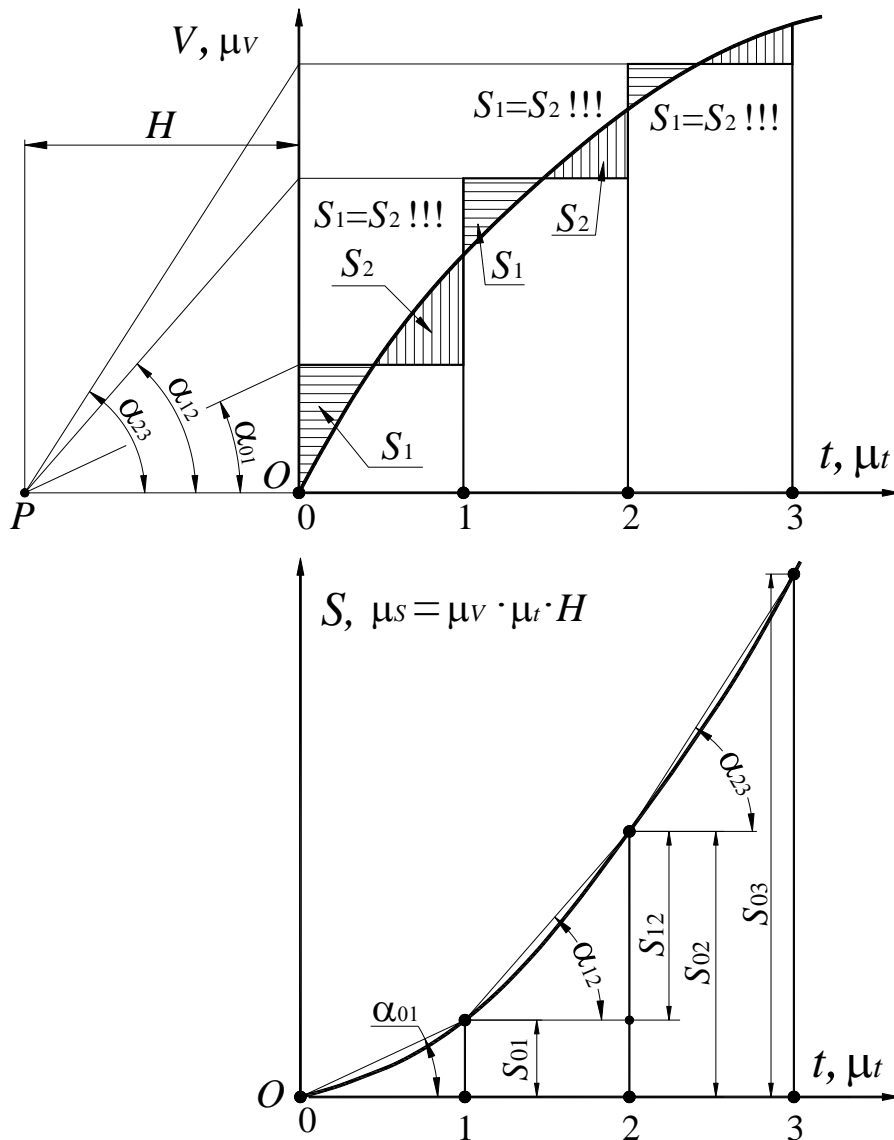


Рис. 2.4. Графічне інтегрування графіка $V = V(t)$

Графік залежності швидкості від часу $V = V(t)$ на рис. 2.4 проінтегруємо з метою отримання графіка $S = S(t)$.

Нагадаємо геометричний зміст інтеграла: інтеграл пропорційний площі, яка обмежена межами інтегрування, кривою і віссю абсцис. З формули (2.1) маємо

$$dS = V \cdot dt = (y \cdot \mu_v) \cdot (dx \cdot \mu_t) = (y \cdot dx) \cdot (\mu_v \cdot \mu_t). \quad (2.4)$$

Тут добуток $(y \cdot dx)$ – це площа на окремій ділянці інтегрування. Для зручності інтегрування на кожній ділянці фігуру, яка обмежена межами інтегрування, кривою і віссю абсцис, доцільно замінити рівновеликим прямокутником. Завдяки таким замінам суттєво спрощується процес інтегрування, оскільки інтеграл на такій ділянці – це похила пряма.

Розглянемо послідовність графічного інтегрування. На рис. 2.4 угорі наведено графік залежності швидкості від часу $V = V(t)$. На ділянках цього графіка 0-1, 0-2 і т. д. фігури, утворені межами інтегрування, кривою і віссю абсцис, заміняємо рівновеликими прямокутниками. Для цього необхідно, щоб на кожній ділянці площа S_2 , яку видаляємо з фігури, була рівна площі S_1 , яку додаємо. Усереднені ординати (висоти прямокутників) переносимо на вісь ординат. Вибираємо полюсну відстань $OP = H$ і проводимо відрізки, що з'єднують кінці усереднених ординат з полюсом P і утворюють з віссю абсцис кути α_{01} , α_{12} і т. д. Вибираємо систему координат для графіка $S = S(t)$. З початку системи координат проводимо пряму на ділянці 0-1 під кутом α_{01} , фіксуємо в положенні 1 величину переміщення S_{01} . Далі на ділянці 1-2 проводимо пряму під кутом α_{12} і визначаємо переміщення S_{12} (шлях, пройдений з положення 1 у положення 2). Шлях (переміщення), пройдений з положення 0 у положення 2 рівний $S_{02} = S_{01} + S_{12}$. Виконуючи побудови для інших ділянок, отримуємо графік $S = S(t)$.

в). Аналоги швидкостей і прискорень

У випадках, коли переміщення вихідної ланки задано не в залежності від часу, а в залежності від координати вхідної ланки, кінематичний аналіз можна провести скориставшись поняттями аналогів швидкості і прискорення.

Нехай дана залежність переміщення вихідної ланки від кута повороту кривошипа

$$S_B = S_B(\varphi). \quad (2.5)$$

Швидкість вихідної ланки буде

$$V_B = \frac{dS_B}{dt} = \frac{dS_B}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dS_B}{d\varphi} \cdot \omega. \quad (2.6)$$

Позначимо аналог швидкості вихідної ланки, як $\frac{dS_B}{d\varphi} = S_B'$, тоді

$$V_B = S_B' \cdot \omega. \quad (2.7)$$

Прискорення вихідної ланки буде дорівнювати

$$a_B = \frac{dV_B}{dt} = \frac{d(S_B' \cdot \omega)}{dt} = \frac{dS_B'}{dt} \cdot \omega + \frac{d\omega}{dt} \cdot S_B' = \frac{dS_B'}{dt} \cdot \omega + \varepsilon \cdot S_B'. \quad (2.8)$$

Перетворюючи вираз $\frac{dS_B'}{dt}$, отримаємо

$$\frac{dS_B'}{dt} = \frac{dS_B'}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2 S_B}{d\varphi^2} \cdot \omega = S_B'' \cdot \omega.$$

Після підстановки перетвореного виразу $\frac{dS_B'}{dt}$ в (2.8) одержимо

$$a_B = \frac{d^2 S_B}{d\varphi^2} \cdot \omega^2 + \varepsilon \cdot S_B' = S_B'' \cdot \omega^2 + \varepsilon \cdot S_B'. \quad (2.9)$$

У виразі (2.9) $S_B'' = \frac{d^2 S_B}{d\varphi^2}$ – аналог прискорення вихідної ланки.

г). Метод кінематичних діаграм

У більшості випадків механізм здійснює циклічний рух. Розглянемо кінематичний аналіз механізму циклічної дії з використанням методу діаграм. Для цього в масштабі будують кінематичну схему і визначають крайні положення вихідної ланки. Під масштабом будемо розуміти відношення фізичної величини до довжини відрізка, яким ця величина зображується графічно, тобто

$$\mu = \frac{\text{Фізична величина}}{\text{Відрізок в мм}}. \quad (2.10)$$

Якщо фізична величина не лінійна (наприклад, швидкість або сила), то масштаб μ буде мати відповідну розмірність. В даному випадку і чисельник, і знаменник будуть мати однакову розмірність (міліметри), тому масштаб буде безрозмірним.

Розглянемо побудову кінематичних діаграм для нецентрального кривошипно-повзунного механізму (КПМ). Задані наступні параметри КПМ:

r – довжина кривошипа;

l – довжина шатуна;

e – ексцентриситет.

Намічаємо центр обертання кривошипа (точка O) і траєкторію руху центра обертальної кінематичної пари B (пара «повзун – шатун»), яка зміщена на відносно центра O на величину e (див. рис. 2.5). З центра O проводимо коло радіусом r , що є траєкторією руху точки A .

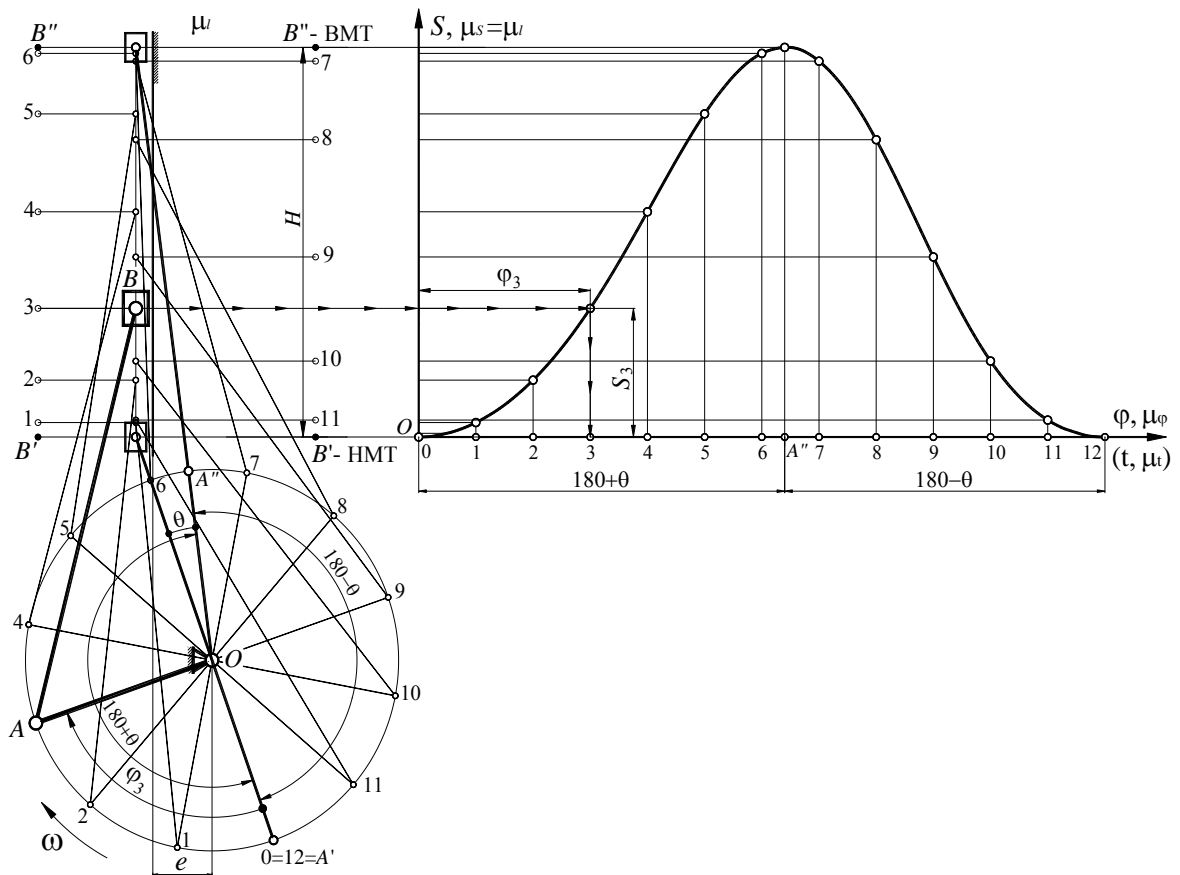


Рис. 2.5. Плани положень і діаграма $S = S(\varphi)$ для нецентрального КПМ

Враховуючи, що $OB'' = AB + OA$, а $OB' = AB - OA$ необхідно з центра O провести дугу радіусом рівним $l+r$ до перетину з траєкторією руху точки B . Отримана точка перетину є верхньою мертвою точкою повзуна OB'' . Аналогічно з використанням радіуса $l-r$ знаходимо положення нижньої мертвої точки – точки B' . Проводимо відрізок OB'' і на його перетині з траєкторією руху точки A , знаходимо одне з крайніх положень кривошипа – положення OA'' . Для визначання іншого крайнього положення (OA') необхідно з точки B' провести пряму через центр O до перетину з траєкторією руху точки A . Відзначимо, що кут між крайніми положеннями кривошипа OA' і OA'' рівний

$180^\circ + \theta$ і є кутом робочого ходу, тому в якості початкового положення кривошипа приймаємо положення OA' . Обираємо кутовий крок повороту кривошипа (в даному випадку 30°) і будуємо ряд суміщених положень механізму. Далі будуємо систему координат для графіка $S = S(\varphi)$. При цьому вісь часу (кута повороту кривошипа) розташовуємо на рівні нижньої мертвої точки B' . Для спрощення побудови графіка $S = S(\varphi)$ приймаємо його масштаб рівним масштабу механізму, тобто $\mu_s = \mu_l$. Положення 3 механізму, що визначається кутом повороту кривошипа φ_3 , на рис. 2.5 показано жирною лінією. Для цього положення зображено, як перенести переміщення повзуна S_3 на графік $S = S(\varphi)$. В такий спосіб знаходимо переміщення повзуна в решті положень і будуємо графік $S = S(\varphi)$.

Якщо задана кутова швидкість кривошипа ω , кут повороту кривошипа буде рівний $\varphi = \omega \cdot t$, і тоді методом графічного диференціювання графіка $S = S(\varphi)$ можливо отримати графік швидкості $V = V(t)$, а продиференціювавши графік швидкості за t , отримати графік прискорення $a = a(t)$.

Якщо ж швидкість кривошипа не відома, тоді для отримання аналога швидкості $S' = ds / d\varphi$ треба продиференціювати графік $S = S(\varphi)$ за φ , а графік аналога прискорення $S'' = d^2S / d\varphi^2$ можливо отримати продиференціювавши графік аналога швидкості. На рис. 2.6 показано графік $S = S(\varphi)$, отриманий з рис. 2.5. На графіку $S = S(\varphi)$ показано відрізок L , який в масштабі $\mu_\varphi = \frac{2\pi}{L}$ (розмірність – радіан/мм, тобто 1/мм) зображає кут 2π , тобто один оборот кривошипа. На рисунку показано також відрізок y_H , який в масштабі зображає хід повзуна $H = y_H \cdot \mu_s$, тобто масштаб переміщення рівний $\mu_s = H / y_H$.

На ділянках 0-1, 1-2, 2-3 і т. д. графіка $S = S(\varphi)$ проводимо хорди. Як уже відмічалось, будемо вважати, що кут нахилу хорди дорівнює куту нахилу дотичної на середині даної ділянки. В свою чергу тангенс кута нахилу пропорційний диференціалу. На рис. 2.6 у збільшеному масштабі М 2:1 показана частина графіка $S = S(\varphi)$, де добре видно хорди на ділянках 0-1 і 1-2, а також кути їх нахилу α_{01} і α_{12} .

Під графіком $S = S(\varphi)$ розташовуємо координатні осі для графіка аналога швидкості. Для цього графіка обираємо полюсну відстань $H_1 = P_s O$.

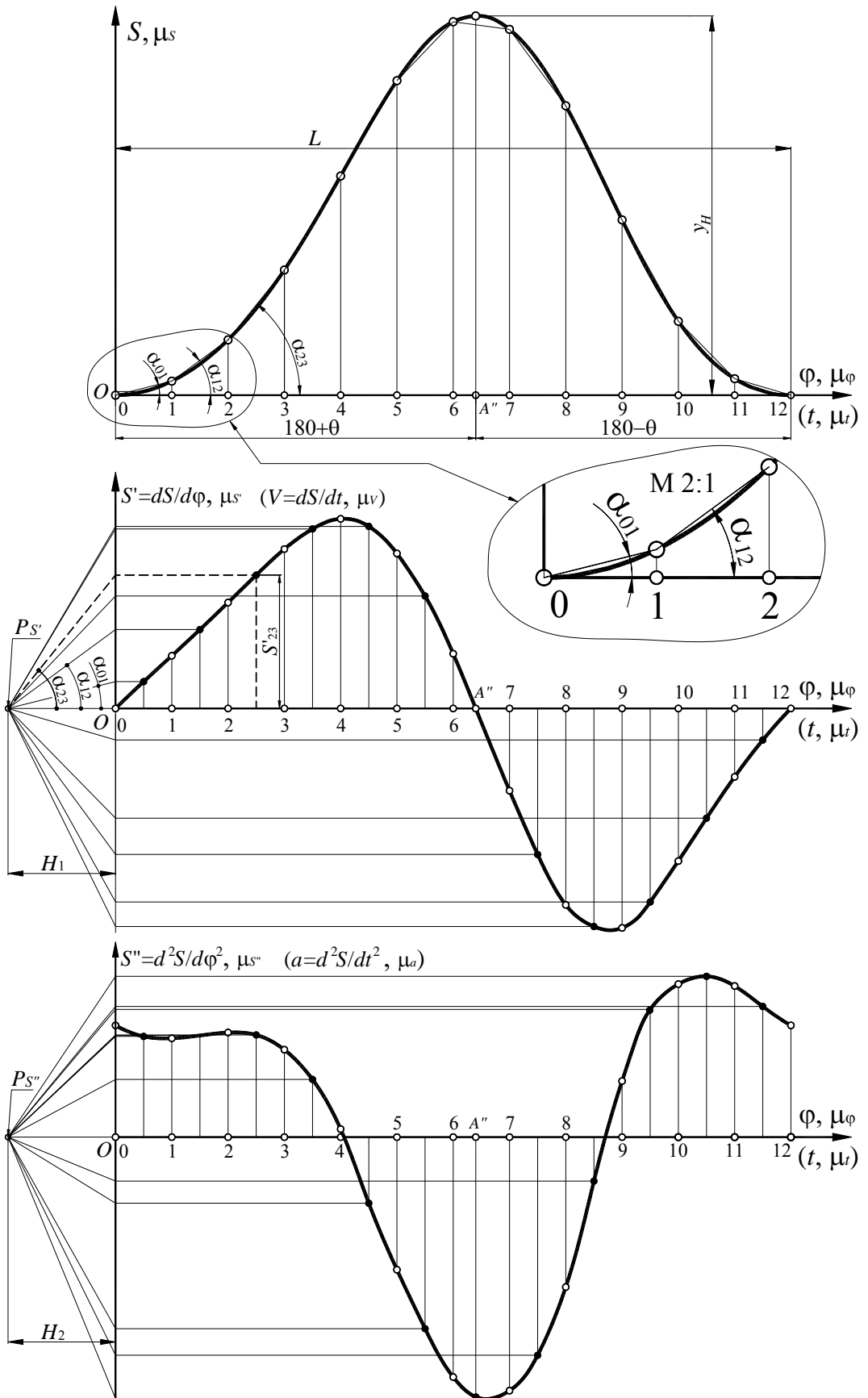


Рис. 2.6. Побудова кінематичних діаграм

Хорди (або їх копії) з графіка $S = S(\varphi)$ переносимо в полюс $P_{S'}$, що знаходиться на відстані H_1 від початку координат, і продовжуємо їх до перетину з віссю ординат OS' . На осі ординат хорди відсікають відрізки, які в масштабі зображають значення аналога швидкості на серединах відповідних ділянок. В якості прикладу на рис. 2.6 напівжирними пунктирними лініями показано, як було визначено значення аналога швидкості S_{23}' на середині ділянки 2-3.

На графіку $S' = S'(\varphi)$ кінці відрізків, які зображають значення аналога швидкості на серединах ділянок, позначені великими точками, а на межах ділянок – невеликими колами.

Після побудови графіка $S' = S'(\varphi)$ за аналогічною методикою будуємо графік аналогів прискорення повзуна $S'' = S''(\varphi)$.

Визначимо масштаби графіків. Вище вже були згадані масштаби $\mu_\varphi = \frac{2\pi}{L}$ і $\mu_s = \frac{H}{y_H}$. Необхідно визначити масштаби графіків аналогів швид-

кості і прискорення. За аналогією з виразом $V = \frac{dS}{dt} = \frac{dy \cdot \mu_s}{dx \cdot \mu_t} = \text{tg}\alpha \cdot \frac{\mu_s}{\mu_t}$ можна

записати

$$S' = \frac{dS}{d\varphi} = \frac{dy \cdot \mu_s}{dx \cdot \mu_\varphi} = \text{tg}\alpha \cdot \frac{\mu_s}{\mu_\varphi}. \quad (2.11)$$

Нехай в довільному положенні відрізок, який зображає значення аналога швидкості, рівний $y_{S'} = \frac{S'}{\mu_{S'}}$, тоді

$$\text{tg}\alpha = \frac{y_{S'}}{H_1}. \quad (2.12)$$

Після підстановки (2.12) в (2.11) отримаємо

$$S' = y_{S'} \cdot \frac{\mu_s}{H_1 \cdot \mu_\varphi}. \quad (2.13)$$

З виразу (2.13) відзначимо, що для будь-якого положення вираз $\frac{\mu_s}{H_1 \cdot \mu_\varphi} = \text{const}$. Це означає, що відрізок $y_{S'}$ пропорційний аналогу швидкості

S' . Тоді масштаб графіка $S' = S'(\varphi)$ буде дорівнювати

$$\mu_{S'} = \frac{\mu_S}{H_1 \cdot \mu_\varphi}. \quad (2.14)$$

За аналогією масштаб графіка $S'' = S''(\varphi)$ буде

$$\mu_{S''} = \frac{\mu_{S''}}{H_2 \cdot \mu_\varphi}. \quad (2.15)$$

Якщо задати кутову швидкість кривошипа ω , то час одного оберту буде рівний $t = 2\pi/\omega$ секунд, відповідно масштаб часу на осі абсцис буде

$$\mu_t = \frac{t}{L} = \frac{2\pi}{L \cdot \omega} \left[\frac{\text{с}}{\text{мм}} \right]. \quad (2.16)$$

При цьому швидкість описується виразом $V = S' \cdot \omega$, а прискорення при $\omega = \text{const}$ буде $a = S'' \cdot \omega^2$.

Масштаби графіків швидкості і прискорення за аналогією з виразами (2.14) і (2.15) можна розрахувати за виразами

$$\mu_V = \frac{\mu_S}{H_1 \cdot \mu_t}; \quad (2.17)$$

$$\mu_a = \frac{\mu_{S''}}{H_2 \cdot \mu_t}. \quad (2.18)$$

2.2. Метод планів

План швидкостей (прискорень) – це діаграма, на якій від однієї точки (полюса плану) відкладені вектори абсолютних швидкостей (прискорень). На відміну від кінематичних діаграм, на яких на протязі всього періоду циклу показано рух однієї точки або однієї ланки механізму, на плані ми маємо інформацію щодо руху всіх точок механізму в окремий заданий момент часу. Побудова планів базується на положеннях теоретичної механіки щодо руху твердого тіла і складного руху точки. Тому спочатку коротко розглянемо необхідні для побудови планів положення з теоретичної механіки.

а). Рух твердого тіла

Поступальний рух – це такий рух, при якому траєкторії, швидкості і прискорення всіх точок тіла однакові (рис. 2.7). На рис. 2.7, а) зображено переміщення тіла, кожна точка якого рухається за синусоїдальною траєкторією. На цьому рисунку траєкторія руху точки A показана суцільною лінією, а траєкторія точки B – пунктирною.

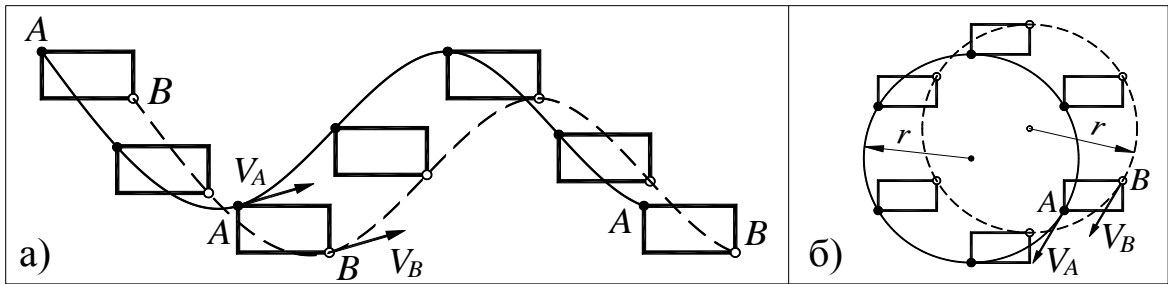


Рис. 2.7. Поступальний рух твердого тіла

На рис. 2.7, б) всі точки рухаються за круговими траєкторіями. В якості прикладу на рис. 2.7 показані вектори швидкостей точок A і B , які направлені за дотичними до траєкторій.

Обертальний рух. В цьому випадку всі точки тіла рухаються за круговими траєкторіями з центром в точці O (рис. 2.8). Швидкість точки направлена за дотичною до траєкторії руху, тобто перпендикулярно лінії OA (рис. 2.8, а), а величина пропорційна кутовій швидкості ω і відстані до центра обертання O . Так $V_A = \omega \cdot OA$, $V_B = \omega \cdot OB$ і т. д. Лінія проведена з точки O через кінці векторів швидкостей є лінією розподілу швидкостей вздовж стрижня OA (див. рис. 2.8, а). Лінія розподілу швидкостей дає можливість графічно визначити швидкість будь-якої точки стрижня на лінії OA .

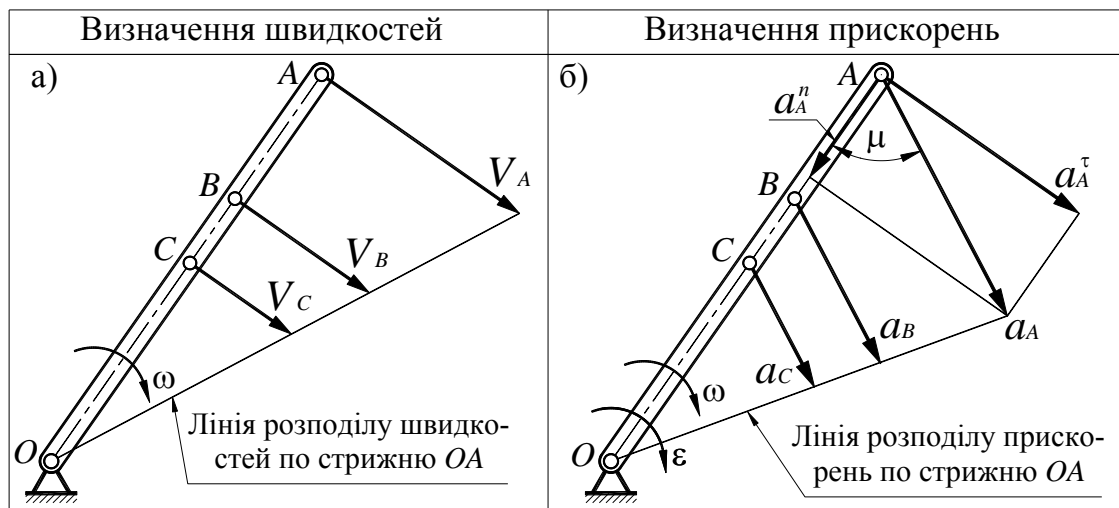


Рис. 2.8. Обертальний рух твердого тіла

Прискорення характеризує зміну швидкості за модулем і напрямком. Зміна модуля оцінюється дотичним прискоренням $a^\tau = dV / dt$, а зміна напрямку – нормальним прискоренням $a^n = V^2 / \rho$, де ρ – радіус кривизни траєкторії в даній точці, V – лінійна швидкість точки.

На рис. 2.8 справа показано стрижень OA , який рухається навколо центра O зі швидкістю ω і прискоренням ϵ . Знайдемо повне прискорення

точки A . При заданих ω і ε залежності для визначення прискорень точки A , враховуючи, що для точки A радіус кривизни траєкторії $\rho = OA$, а $V_A = \omega \cdot OA$, будуть мати наступний вигляд:

$$a_A^\tau = \frac{dV_A}{dt} = \frac{d(\omega \cdot OA)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot OA = \varepsilon \cdot OA, \quad (2.19)$$

$$a_A^n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(\omega \cdot OA)^2}{OA} = \omega^2 \cdot OA. \quad (2.20)$$

Вектор повного прискорення точки A буде дорівнювати $\vec{a} = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$, а модуль прискорення точки A

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = \sqrt{(\omega^2 \cdot OA)^2 + (\varepsilon \cdot OA)^2} = OA \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (2.21)$$

З формули (2.21) робимо висновок, що повне прискорення точки пропорційне відстані до центра обертання O . Напрямок повного прискорення характеризується кутом μ . З рис. 2.8 тангенс кута μ можна знайти за залежністю

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_A^\tau}{a_A^n} = \frac{\varepsilon \cdot OA}{\omega^2 \cdot OA} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (2.22)$$

Отримане означає, що напрямок повного прискорення будь-якої точки не залежить від відстані до точки O , тобто напрямки векторів прискорень точок A , B і C однакові, а лінія, проведена з центра O до кінця вектора a_A , є лінією розподілу прискорень вздовж стрижня OA .

Складний рух твердого тіла. Цей рух складається з двох простих рухів – поступального і обертального. Траєкторія поступального руху може бути будь-якою (див. рис. 2.7). Розглянемо модель складного руху, коли поступальний рух прямолінійний (рис. 2.9).

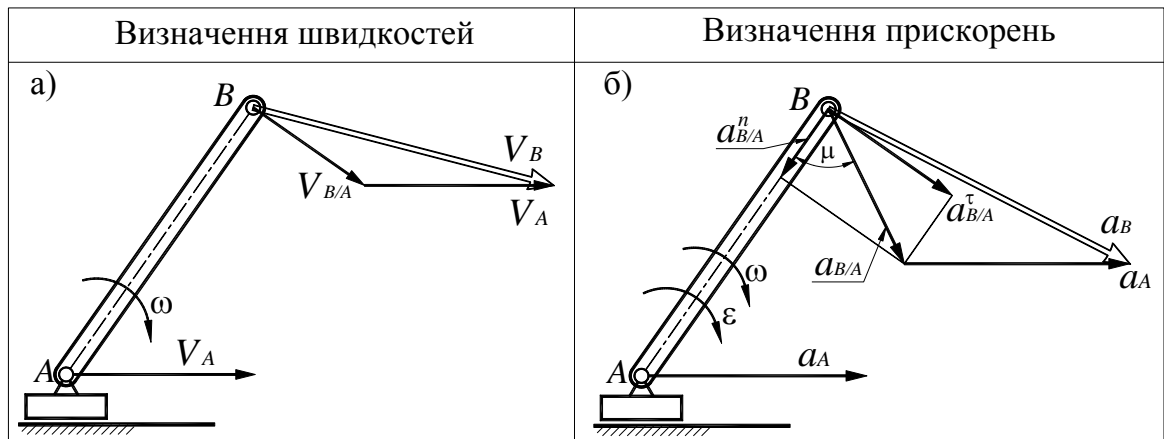


Рис. 2.9. Складний рух твердого тіла

Спочатку розглянемо питання визначення швидкості точки при складному русі тіла (рис. 2.9, а). В цьому випадку можливі такі варіанти руху:

- а) $V_A = 0$, $\omega \neq 0$ – обертальний рух стрижня AB ;
- б) $\omega = 0$, $V_A \neq 0$ – поступальний рух стрижня AB ;
- б) $\omega \neq 0$ і $V_A \neq 0$ – складний рух (плоскопаралельний) стрижня AB .

При плоскопаралельному русі тіла швидкість будь-якої точки дорівнює геометричній сумі двох швидкостей: швидкості поступального руху разом з полюсом і швидкості обертального руху навколо полюса. В якості полюса може бути прийнята будь-яка точка тіла. У випадку, зображеному на рис. 2.9, а) для визначення швидкості точки B в якості полюса приймаємо точку A , оскільки швидкість V_A задана. Швидкість обертального руху точки B відносно полюса A дорівнює $V_{B/A} = \omega \cdot AB$ і направлена перпендикулярно AB .

З урахуванням вище викладеного швидкість точки B можна знайти за виразом

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}. \quad (2.23)$$

На рис. 2.9, б) показано складний рух стрижня AB , при цьому задане прискорення точки A – a_A , кутова швидкість – ω і кутове прискорення – ε . Прискорення точки B є геометричною сумою двох прискорень: прискорення полюса A і обертального прискорення точки B навколо полюса A , тобто

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}. \quad (2.24)$$

В свою чергу прискорення обертального руху $a_{B/A}$ є геометричною сумою нормального і дотичного (тангенціального) прискорень

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{B/A}^t; \quad \vec{a}_{B/A}^n \parallel AB; \quad \vec{a}_{B/A}^t \perp AB. \quad (2.25)$$

Після підстановки (2.25) в (2.24) отримаємо вираз для прискорення точки B

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{B/A}^t. \quad (2.26)$$

Напрямок обертального прискорення будь-якої точки на лінії AB визначається кутом μ (формула 2.22).

Складний рух точки. В теоретичній механіці при розгляді цього питання використовуються поняття нерухомої та рухомої системи координат. Всі рухи, які визначені відносно нерухомої системи координат є абсолютними (швидкість, прискорення). Рухи рухомої системи координат відносно нерухомої є переносними рухами. Рухи, визначені відносно рухомої системи координат є відносними.

Так, наприклад, якщо розглядати рух пасажирів по палубі корабля, рух відносно палуби буде відносним рухом, рух корабля відносно нерухомої системи відліку (берега) – переносним рухом, а рух пасажирів відносно нерухомої системи відліку (берега) – абсолютним рухом. При цьому, якщо рух корабля не поступальний, то для пасажирів його переносні швидкість і прискорення – це швидкість і прискорення тієї точки палуби, в якій знаходиться пасажир в даний момент часу.

Абсолютна швидкість матеріальної точки при складному русі визначається формулою

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r, \quad (2.27)$$

а абсолютне прискорення

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}^k, \quad (2.28)$$

де a_a – абсолютне прискорення;

a_e – переносне прискорення (характеризує зміну V_e в переносному русі);

a_r – відносне прискорення (характеризує зміну V_r у відносному русі);

a^k – коріолісове прискорення, яке виникає у випадку, якщо переносний рух не поступальний, і характеризує зміну V_r через переносний рух і зміну V_e через відносний рух.

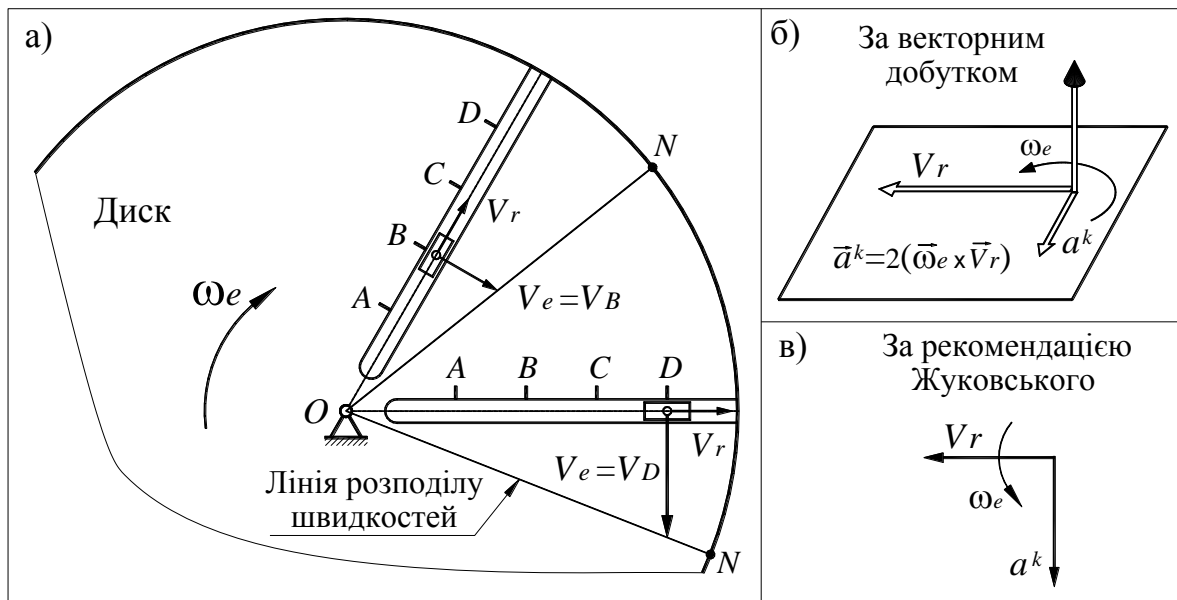


Рис. 2.10. Визначення коріолісового прискорення

Як було зазначено, у випадку, коли переносний рух не поступальний, він викликає зміну відносної швидкості V_r . Розглянемо наступний приклад. Повзун рухається в напрямній диску, що обертається, з відносною швидкістю V_r (рис. 2.10, а). Внаслідок обертального руху диска змінюється напрямок

руху повзуна, тобто V_r . Навіть якщо V_r не змінюється за модулем, то обов'язково змінюється її напрямок. В свою чергу внаслідок руху повзуна в напрямній змінюється його переносна швидкість V_e , яка рівна швидкості тієї точки диска, в якій знаходиться повзун (див. рис. 2.10, а). Вектор коріолісового прискорення, що при цьому виникає, визначається векторним добутком

$$\vec{a}^k = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r). \quad (2.29)$$

Величина модуля коріолісового прискорення

$$a^k = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r \cdot \cos \alpha, \quad (2.30)$$

де α – кут між векторами ω_e і V_r .

В плоских механізмах завжди $\alpha = 90^\circ$. В такому випадку $a^k = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r$. Напрямок прискорення можна знайти скориставшись правилом векторного добутку (рис. 2.10, б) або за рекомендацією Жуковського (рис. 10, в).

б). Теорема подібності для планів

Теорема подібності є досить ефективним інструментом для побудови планів швидкостей і прискорень.

Розглянемо наступний приклад. На рис. 2.11 трикутник ΔABC здійснює плоскопаралельний рух. При цьому задана швидкість V_A і напрямок швидкості точки B , чого достатньо для визначеності руху тіла. Необхідно визначити V_B і V_C і побудувати план швидкостей.

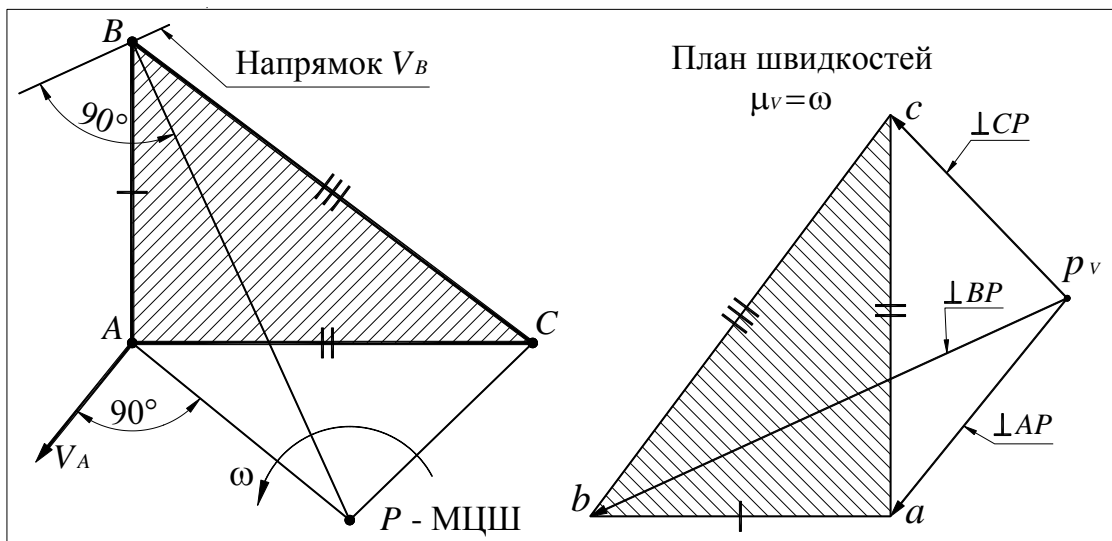


Рис. 2.11. Плоскопаралельний рух тіла (щодо виведення теореми подібності)

Спочатку знаходимо миттєвий центр швидкостей (МЦШ), який знаходиться на перетині перпендикулярів проведених з точок A і B до напрямків

швидкостей цих точок. Точку перетину позначаємо як полюс P і рух тіла (трикутника ΔABC) розглядаємо як обертовий рух навколо P в даний момент часу. Кутова швидкість тіла дорівнює $\omega = V_A / AP$. Швидкості всіх трьох точок можна знайти за виразами

$$\begin{aligned} V_A &= \omega \cdot AP; \\ V_B &= \omega \cdot BP; \\ V_C &= \omega \cdot CP. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Побудуємо план швидкостей в масштабі

$$\mu_v = \frac{V_A}{p_v a} = \frac{V_B}{p_v b} = \frac{V_C}{p_v c}. \quad (2.32)$$

Якщо прийняти значення масштабу швидкості $\mu_v = \omega$, тоді відрізки, які будуть зображати на плані швидкості точок A , B і C , будуть рівні

$$\begin{aligned} p_v a &= AP; \\ p_v b &= BP; \\ p_v c &= CP. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Вибираємо полюс плану p_v і з полюса проводимо відрізки $p_v a$, $p_v b$ і $p_v c$ перпендикулярно відрізкам AP , BP і CP відповідно (див. рис. 2.11 справа).

Розглянемо на плані швидкостей один із трикутників, в якому дві сторони відображають абсолютні швидкості, наприклад, $\Delta ap_v b$. З цього трикутника можна знайти зв'язок між векторами абсолютних швидкостей

$$\overrightarrow{p_v b} = \overrightarrow{p_v a} + \overrightarrow{ab}. \quad (2.34)$$

Якщо (2.34) помножити на μ_v , то отримаємо $\overrightarrow{p_v a} \cdot \mu_v = \overrightarrow{V_A}$; $\overrightarrow{p_v b} \cdot \mu_v = \overrightarrow{V_B}$. Очевидно, що $\overrightarrow{ab} \cdot \mu_v = \overrightarrow{V_{B/A}}$ – швидкість обертвого руху точки B відносно точки A . Аналогічно \overrightarrow{ac} і \overrightarrow{bc} – відповідні відносні швидкості.

Оскільки відносні швидкості мають наступні напрямки: $V_{B/A} \perp AB$, $V_{C/A} \perp AC$ і $V_{C/B} \perp BC$, то трикутники ΔABC і Δabc подібні (рис. 2.11), але Δabc відносно ΔABC повернутий на 90° за напрямком ω .

Сформулюємо теорему подібності:

1) Відрізки, які з'єднують кінці векторів абсолютних швидкостей тіла, зображують відповідні відносні швидкості.

2) Фігура, що утворена кінцями векторів абсолютних швидкостей тіла, подібна фігурі утвореній цими ж точками на тілі, але повернута на 90° за напрямком кутової швидкості тіла ω .

Зазначене, за виключенням кута повороту подібної фігури, відноситься і до плану прискорень. Для планів прискорень кути повороту наступні:

- а) $\varepsilon = 0$ (тобто $\omega = \text{const}$) кут повороту 180° ;
- б) $\varepsilon > 0$ – кут повороту $180^\circ - \mu$ ($\text{tg}\mu = \varepsilon/\omega^2$);
- в) $\varepsilon < 0$ – кут повороту $180^\circ + \mu$.

2.3. Кінематичний аналіз груп Ассура

Як уже відмічалось, важливою перевагою структурної класифікації плоских механізмів Ассура є можливість проводити кінематичний і силовий аналіз механізмів по групах Ассура. Важливо також відзначити, що кількість груп Ассура, які отримали широке розповсюдження в сучасних механізмах досить обмежена, причому це переважно групи 2-го класу. Зазначене надає можливість досить просто і ефективно проводити кінематичний і силовий аналіз механізмів. Кінематичний аналіз завжди починається з початкового механізму (в більшості випадків кривошипа і стояка). Зважаючи на те, що вище було наведено інформацію щодо руху твердого тіла, в тому числі розглянуто і обертальний рух стрижня, аналіз такого механізму окремо розглядати не будемо. Відзначимо також, що плоскопаралельний рух тіла в будь-який момент часу можна представити, як обертальний навколо миттєвого центру.

При розгляді питання аналізу груп Ассура будемо враховувати наступне: швидкість руху будь-якої точки тіла можливо знайти, якщо задана кутова швидкість тіла і швидкість однієї з точок. Для визначення прискорень точок необхідно ще задати кутове прискорення і прискорення однієї з точок.

а). Група Ассура 2-го класу 1-го виду

Це група з обертальними парами A , B і C та ланками 2 і 3 (рис. 2.12). Ланки 1 і 4 не входять до складу групи (показані пунктирною лінією). Розглянемо приклад, коли задані швидкості і прискорення точок A і C . Необхідно визначити швидкість і прискорення точки B , а також кутові швидкості і прискорення ланок 2 і 3.

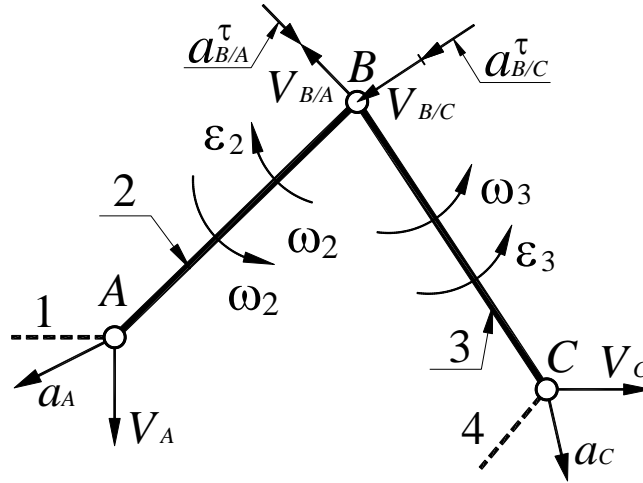


Рис. 2.12. Кінематична схема групи Ассура 2-го класу 1-го виду

Розглядаючи точку B як точку ланки 2 і прийнявши в якості полюса точку A , а потім як точку ланки 3 і прийнявши в якості полюса точку C , запишемо векторні рівняння для визначення V_B

$$\begin{aligned}\vec{V}_B &= \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}; \\ \vec{V}_B &= \vec{V}_C + \vec{V}_{B/C}\end{aligned}\quad (2.35)$$

Напрямки векторів відносних швидкостей $\vec{V}_{B/A} \perp AB$; $\vec{V}_{B/C} \perp BC$.

Обираємо масштаб плану швидкостей μ_V і з полюса p_V відкладаємо відрізки, які зображають задані швидкості V_A і V_C , $p_V a = V_A / \mu_V$ і $p_V c = V_C / \mu_V$ відповідно (рис.2.13). З точок a і c на плані швидкостей проводимо промені за напрямками відповідно $\perp AB$ і $\perp BC$ до їх взаємного перетину в точці b , що буде кінцем вектору швидкості точки B . З плану знаходимо швидкості

$$\begin{aligned}V_B &= p_V b \cdot \mu_V; \\ V_{B/A} &= ab \cdot \mu_V; \\ V_{B/C} &= cb \cdot \mu_V.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Кутові швидкості ланок 2 і 3 знайдемо за залежностями

$$\begin{aligned}\omega_2 &= V_{B/A} / AB; \\ \omega_3 &= V_{B/C} / BC.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Для визначення напрямків кутових швидкостей уявно переносимо вектори $\vec{V}_{B/A}$ і $\vec{V}_{B/C}$ в точку B та відносно точок A і C відповідно визначаємо напрямки ω_2 і ω_3 (див. рис. 2.12).

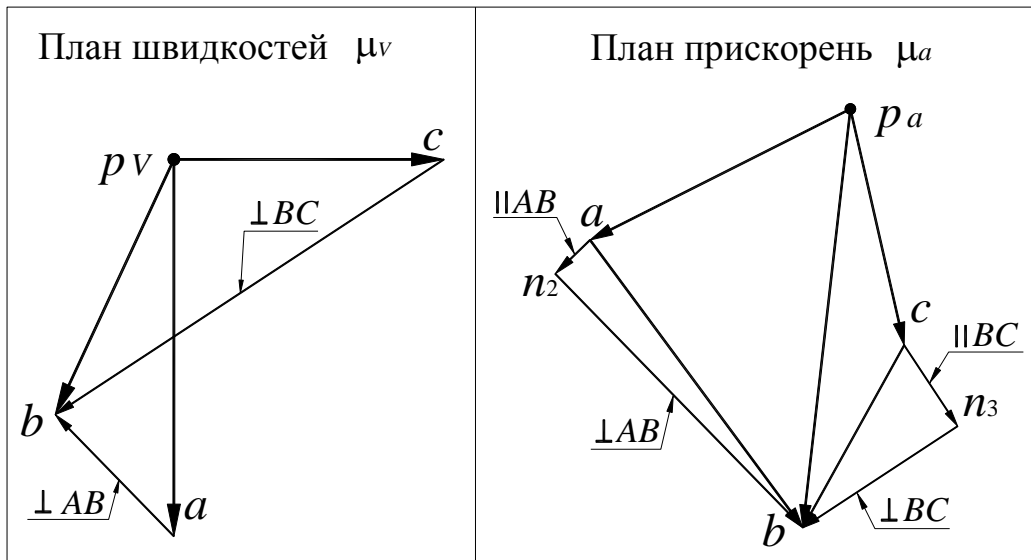


Рис. 2.13. Плани швидкостей і прискорень групи Ассура 2-го класу 1-го виду

Для визначення прискорення точки B застосовуємо такий же підхід як і при визначенні швидкості точки B , відповідно

$$\begin{aligned}\vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{B/A}^\tau; \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_C + \vec{a}_{B/C}^n + \vec{a}_{B/C}^\tau.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Напрямки векторів відносних прискорень

$$\vec{a}_{B/A}^n \parallel AB; \quad \vec{a}_{B/C}^n \parallel BC; \quad \vec{a}_{B/A}^\tau \perp AB; \quad \vec{a}_{B/C}^\tau \perp BC.$$

Відносні нормальні прискорення будуть дорівнювати

$$a_{B/A}^n = \omega_2^2 \cdot AB, \quad a_{B/C}^n = \omega_3^2 \cdot BC.$$

Обираємо масштаб плану прискорень μ_a і з полюса p_a відкладаємо відрізки $p_a a = a_A / \mu_a$ і $p_a c = a_C / \mu_a$, які зображають задані прискорення a_A і a_C відповідно (рис. 2.13). З точок a і c на плані проводимо відрізки $an_2 \parallel AB$ ($an_2 = a_{B/A}^n / \mu_a$) і $cn_3 \parallel BC$ ($cn_3 = a_{B/C}^n / \mu_a$) і позначаємо їх кінці відповідно точками n_2 і n_3 (див. рис. 2.13). З точки n_2 проводимо промінь $\perp AB$ до перетину з променем, проведеним з точки $n_3 \perp BC$. Точка перетину проведених променів (точка b) є кінцем вектору прискорення точки B . З плану прискорень знаходимо

$$\begin{aligned}a_B &= p_a b \cdot \mu_a; \\ a_{B/A}^\tau &= n_2 b \cdot \mu_a; \\ a_{B/C}^\tau &= n_3 b \cdot \mu_a.\end{aligned}\quad (2.39)$$

Кутові прискорення ланок 2 і 3 знаходимо за формулами

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= a_{B/A}^\tau / AB; \\ \varepsilon_3 &= a_{B/C}^\tau / BC.\end{aligned}\quad (2.40)$$

Напрямки кутових прискорень визначаємо в такий же спосіб як і напрямки кутових швидкостей (див. рис. 2.12).

б). Група Ассура 2-го класу 2-го виду

На рис. 2.14 показана група Ассура 2-го виду, яка утворена ланками 2 і 3 (з крайньою поступальною парою). Ланки 1 і 4 (на рис. 2.14 показані пунктирними лініями) не входять до складу цієї групи. Центр обертової пари B не співпадає з віссю xx поступальної пари 3-4. Задані швидкість і прискорення точки A . Рух ланки 3 буде визначеним, якщо задати кутову швидкість і кутове прискорення ланки 4 і швидкість і прискорення однієї з точок цієї ланки. Для розв'язання задачі необхідно буде визначити швидкість і прискорення точки B , а для цього необхідно буде за заданими значеннями ω_4 і ε_4 , а також заданими значеннями швидкості і прискорення довільної точки ланки 4 визначити швидкість і прискорення точки B_4 ланки 4, яка в даний момент часу співпадає з центром шарніра B . Щоб уникнути зайвих розрахунків при розв'язанні цієї задачі, будемо вважати, що задані наступні характеристики: $V_A, a_A, V_{B_4}, a_{B_4}, \omega_4$ і ε_4 .

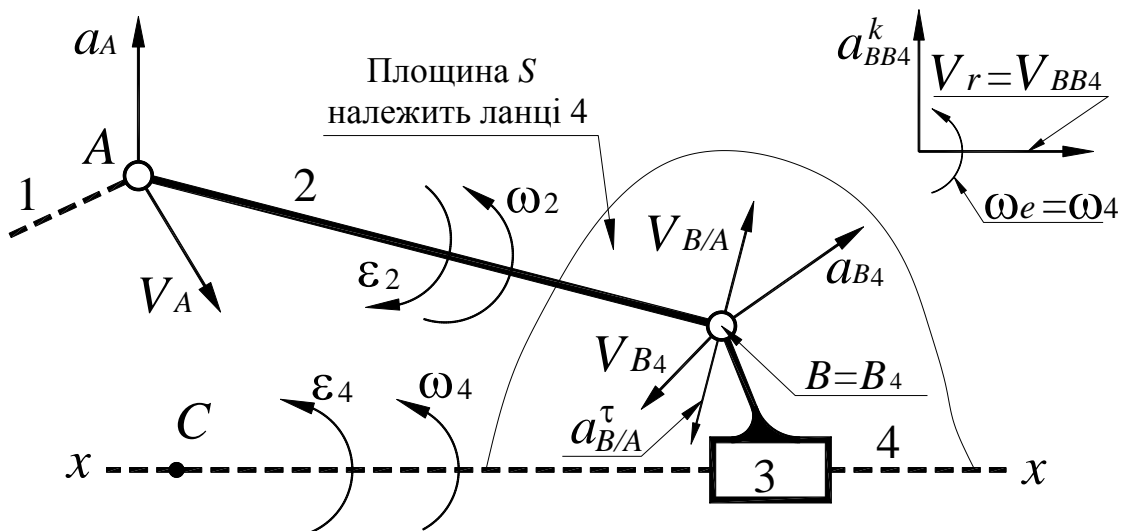


Рис. 2.14. Кінематична схема групи Ассура 2-го класу 2-го виду

Визначаємо швидкість точки B .

Розглядаючи точку B як точку ланки 2 і прийнявши в якості полюса точку A , запишемо рівняння (2.41), в якому є три невідомих: вектор \vec{V}_B і величина вектора $V_{B/A}$, тобто його розв'язати не можливо

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}. \quad (2.41)$$

Розглянемо точку B в її складному русі: будемо вважати, що ланка 4 виконує переносний рух, а ланка 3 рухається разом з ланкою 4 і відносно неї вздовж xx . При цьому швидкість точки B_4 буде переносною швидкістю для точки B , тобто $V_{B_4} = V_e$. Тоді швидкість точки B буде дорівнювати

$$\vec{V}_B = \vec{V}_{B_4} + \vec{V}_{BB_4}. \quad (2.42)$$

В рівнянні (2.42) також три невідомих: вектор \vec{V}_B і величина вектора V_{BB_4} , тобто його також розв'язати не можливо. Напрямки векторів відносних швидкостей в рівняннях (2.41) і (2.42) наступні: $\vec{V}_{B/A} \perp AB$, $\vec{V}_{BB_4} \parallel xx$. Розв'язуємо рівняння (2.41) і (2.42) спільно.

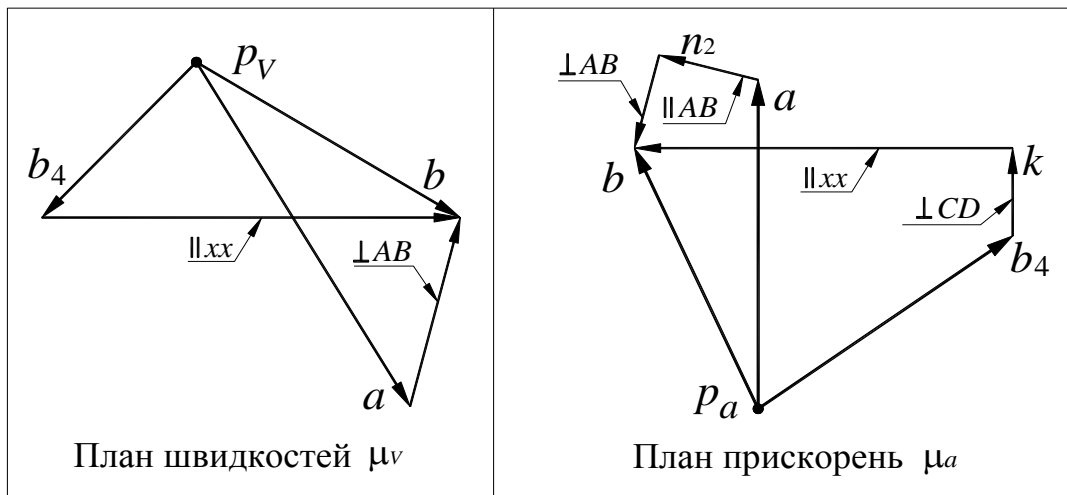


Рис. 2.15. Плани швидкостей і прискорень групи Ассура 2-го класу 2-го виду

Обираємо масштаб плану швидкостей μ_v і з полюса p_v відкладаємо відрізки $p_v a = V_A / \mu_v$ і $p_v b_4 = V_{B_4} / \mu_v$, які зображають задані швидкості точок A і B_4 (рис. 2.15). З точок a і b_4 на плані проводимо промені за напрямками $\perp AB$ і $\parallel xx$ відповідно до їх взаємного перетину в точці b , що є кінцем вектору швидкості точки B . З плану швидкостей знаходимо

$$\begin{aligned} V_B &= p_v b \cdot \mu_v; \\ V_{B/A} &= ab \cdot \mu_v; \\ V_{BB_4} &= b_4 b \cdot \mu_v. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Кутова швидкість ланки 2 знаходиться за залежністю $\omega_2 = V_{B/A} / AB$, а напрямок визначається за допомогою перенесення вектора $\vec{V}_{B/A}$ в точку B (див. рис. 2.14).

Визначаємо прискорення точки B .

Ця задача розв'язується в такому ж порядку, як і задача з визначення швидкості V_B . Тобто перше рівняння (2.44) запишемо, розглядаючи точку B як точку ланки 2, а друге – розглядаючи точку B в її складному русі

$$\begin{aligned}\vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{B/A}^\tau; \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_{B_4} + \vec{a}_{BB_4}^k + \vec{a}_{BB_4}^\tau.\end{aligned}\quad (2.44)$$

В кожному з цих рівнянь по три невідомих, але спільно їх можливо розв'язати. Величини векторів в рівнянні (2.44) знаходяться за залежностями $a_{B/A}^n = \omega_2^2 \cdot AB$; $a_{BB_4}^k = 2 \cdot \omega_4 \cdot V_{B_4B}$, а напрямки векторів наступні: $\vec{a}_{B/A}^n \parallel AB$; $\vec{a}_{B/A}^\tau \perp AB$; $\vec{a}_{BB_4}^k \perp xx$; $\vec{a}_{B_4B}^\tau \parallel xx$. Визначаємо довжини відрізків $p_a a$, $p_a b_4$, an_2 , $b_4 k$, які в масштабі μ_a на плані прискорень зображують вектори \vec{a}_A , \vec{a}_{B_4} , $\vec{a}_{B/A}^n$ і $\vec{a}_{BB_4}^k$ відповідно

$$\begin{aligned}p_a a &= a_A / \mu_a; \\ p_a b_4 &= a_{B_4} / \mu_a; \\ an_2 &= a_{B/A}^n / \mu_a; \\ b_4 k &= a_{BB_4}^k / \mu_a.\end{aligned}$$

У вибраному масштабі плану прискорень μ_a з полюса p_a відкладаємо відрізки, які зображують задані прискорення a_A і a_{B_4} (див. рис. 2.15). З точок a і b_4 на плані проводимо відрізки $an_2 \parallel AB$ і $b_4 k \perp xx$ і позначаємо їх кінці відповідно точками n_2 і k (рис. 2.15). З точок n_2 і k проводимо промені $\perp AB$ і $\parallel xx$ відповідно. На перетині променів отримуємо точку b , що є кінцем вектора прискорення точки B . З плану знаходимо прискорення

$$\begin{aligned}a_B &= p_a b \cdot \mu_a; \\ a_{B/A}^\tau &= n_2 b \cdot \mu_a; \\ a_{BB_4}^\tau &= kb \cdot \mu_a.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Кутове прискорення ланки 2 буде

$$\varepsilon_2 = a_{B/A}^\tau / AB.\quad (2.46)$$

Напрямок кутового прискорення ланки 2 визначаємо в такий же спосіб як і кутової швидкості (див. рис. 2.14).

в). Група Ассура 2-го класу 3-го виду

На рис. 2.16 зображено групу Ассура 3-го виду, яка утворена ланками 2 і 3. Ланки 1 і 4, які на рис. 2.16 показані пунктирними лініями не входять до складу цієї групи. Центр шарніра B не співпадає з віссю поступальної пари ланок 2 і 3 (напрямок AC). Задані швидкість і прискорення точок A і B . Необхідно визначити кутові швидкості і прискорення ланок групи Ассура. $\omega_3 = \omega_2$ і $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$, оскільки ланки 2 і 3 утворюють поступальну пару. Для досягнення мети достатньо знати швидкість і прискорення будь-якої точки однієї з ланок. В даному випадку є можливість визначити швидкість і прискорення точки B_2 ланки 2, яка в даний момент співпадає з центром шарніра B .

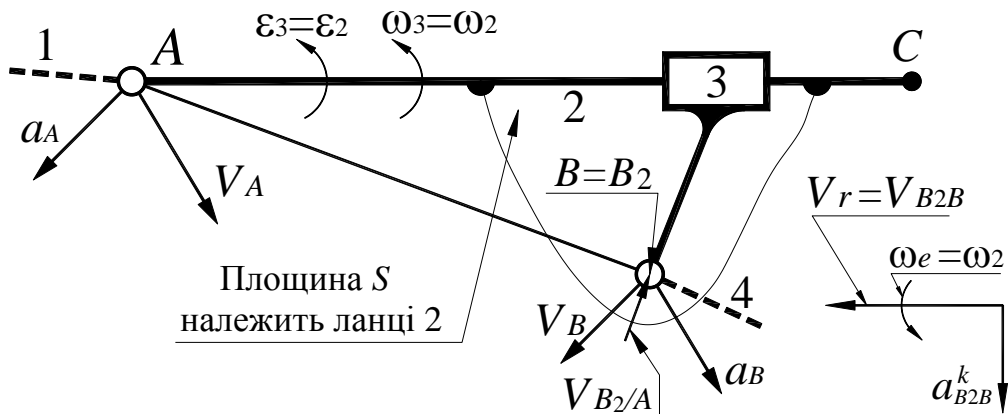


Рис. 2.16. Кінематична схема групи Ассура 2-го класу 3-го виду

З розгляду плоскопаралельного руху ланки 2, прийнявши в якості полюса точку A , можливо записати рівняння (2.47), в якому є невідомими вектор швидкості точки B_2 і величина вектора швидкості $V_{B_2/A}$, тобто його окремо розв'язати не можливо

$$\vec{V}_{B_2} = \vec{V}_A + \vec{V}_{B_2/A}. \quad (2.47)$$

Розглянемо точку B_2 в її складному русі. Будемо вважати, що рух ланки 3 є переносним, а ланка 2 рухається разом з 3 і відносно 3 вздовж лінії AC . При цьому швидкість точки B буде переносною для точки B_2 . Тоді швидкість точки B_2 в складному русі визначатиметься рівнянням

$$\vec{V}_{B_2} = \vec{V}_B + \vec{V}_{B_2B}. \quad (2.48)$$

Напрямки векторів відносних швидкостей в рівняннях (2.47) і (2.48) наступні: $\vec{V}_{B/A} \perp AB$, $\vec{V}_{B_2B} \parallel AC$. Обираємо масштаб плану швидкостей μ_v , з полюса p_v відкладаємо відрізки $p_v a = V_A / \mu_v$ і $p_v b = V_B / \mu_v$, які зображають

У вибраному масштабі плану прискорень μ_a з полюса p_a відкладаємо відрізки, які зображають задані прискорення a_A і a_B (рис. 2.17). З точок a і b на плані проводимо відрізки $an_2 \parallel AB$ і $bk \perp AC$ і позначаємо їх кінці відповідно точками n_2 і k . З точок n_2 і k проводимо промені $\perp AB$ і $\parallel AC$ відповідно. На перетині променів отримуємо точку b_2 , що є кінцем вектора прискорення точки B_2 . З плану прискорень знаходимо

$$\begin{aligned} a_{B_2} &= p_a b_2 \cdot \mu_a; \\ a_{B/A}^\tau &= n_2 b \cdot \mu_a; \\ a_{B_2B}^\tau &= k b_2 \cdot \mu_a. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Кутове прискорення ланки 2 знаходиться за залежністю

$$\varepsilon_2 = a_{B/A}^\tau / AB. \quad (2.52)$$

Напрямок кутового прискорення ланки 2 визначаємо в такий же спосіб як і кутової швидкості ω_2 (див. рис. 2.16).

г). Модифікація груп Ассура 2-го класу з поступальними парами

В розділі «Структурний аналіз механізмів» при розгляді питання «Основний принцип утворення плоских важільних механізмів з нижчими парами» була дана коротка оцінка груп Ассура 2-го класу. Було відзначено, що групи Ассура 2-го класу з поступальними парами, у яких центр шарніра не лежить на осі поступальної пари ($e \neq 0$) в механізмах практично не застосовуються.

При проведенні кінематичного аналізу груп Ассура 2-го класу з поступальними парами у яких $e \neq 0$ можна виконати модифікацію таких груп, щоб у них центр шарніра лежав на осі поступальної пари. Це досить просте перетворення, яке детально розглянемо на прикладі групи Ассура 2-го класу 3-го виду (рис. 2.18).

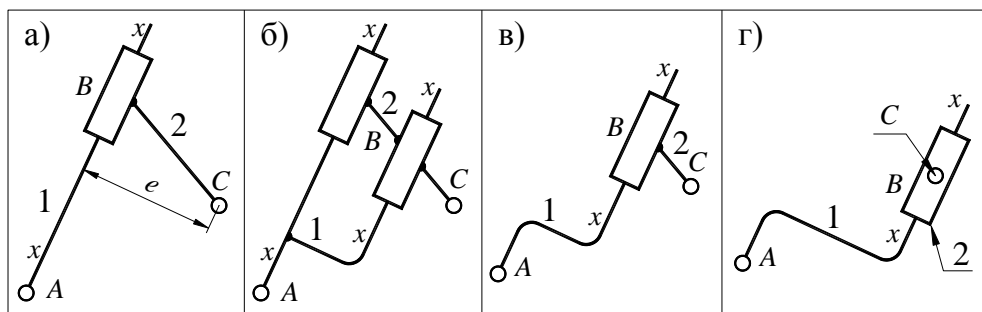


Рис. 2.18. Етапи перетворення групи Ассура 3-го виду

На рис. 2.18, а) показано початковий вигляд групи Ассур 3-го виду, у якої $e \neq 0$. Якщо продублювати поступальну пару B , то абсолютно очевидно, що кінематика цієї групи не зміниться (рис. 2.18, б). Не зміниться кінематика також, якщо надлишковий зв'язок прибрати (рис. 2.18, в). Це означає, що ось поступальної пари xx можна поступально переміщати не змінюючи кінематику групи. Перемістивши ось поступальної пари xx на центр шарніра C , отримаємо групу Ассур 3-го виду, у якої $e = 0$ (рис. 18, г).

На рис. 2.19 (без детального пояснення) наведено результати перетворення решти груп Ассур 2-го класу з поступальними парами. На цьому рисунку пунктирними лініями показані ланки, які не входять до складу груп.

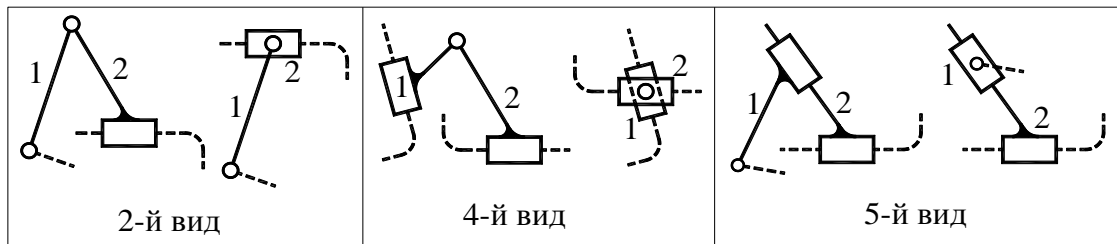


Рис. 2.19. Перетворення груп Ассур 2-го класу з поступальними парами

З розглянутого вище можна зробити наступний висновок: при перетворенні груп Ассур положення обертальних кінематичних пар повинні залишатись без змін, а осі поступальних пар можна поступально переміщати.

д). Кінематичний аналіз групи Ассур 3-го класу

Визначення швидкостей і прискорень груп 3-го класу може бути здійснено методом особливих точок Ассур або методом хибних планів. Найбільш поширеним і ефективним є метод особливих точок. Особливі точки дають можливість зменшити кількість невідомих в векторних рівняннях, завдяки тому, що напрямки відносних швидкостей і прискорень збігаються. Методика кінематичного аналізу найбільш простої групи Ассур 3-го класу з обертовими парами детально розглянута в деяких підручниках. Розглянемо особливості методики аналізу групи Ассур 3-го класу, якщо в ній є поступальні пари. У випадку, коли в групі є зовнішня поступальна пара, то корисну інформацію можна отримати, ознайомившись з методикою аналізу групи Ассур 2-го класу 2-го типу.

Розглянемо випадок, коли одна із внутрішніх пар є поступальною.

Нехай дана група 3-го класу (рис. 2.20), в якій відомі швидкості та прискорення точок A , C , E . Базова ланка 2 містить дві обертальні (2-1 і 2-4) і одну поступальну пару (2-3).

Спочатку знаходимо особливі точки Ассура. Для груп Ассура 3-го класу таких точок завжди 3 (S_2 , S_2' і S_2''). Ці точки знаходяться на перетинах продовжень ліній повідків 1 і 4 і перпендикуляра до осі поступальної пари (напрямок BD) проведеного з точки C . Для розв'язання завдання можна скористатися будь-якою із цих точок. Візьмемо особливу точку S_2 базисної ланки 2, яка в даний момент часу збігається з точкою S_3 площини Π_3 .

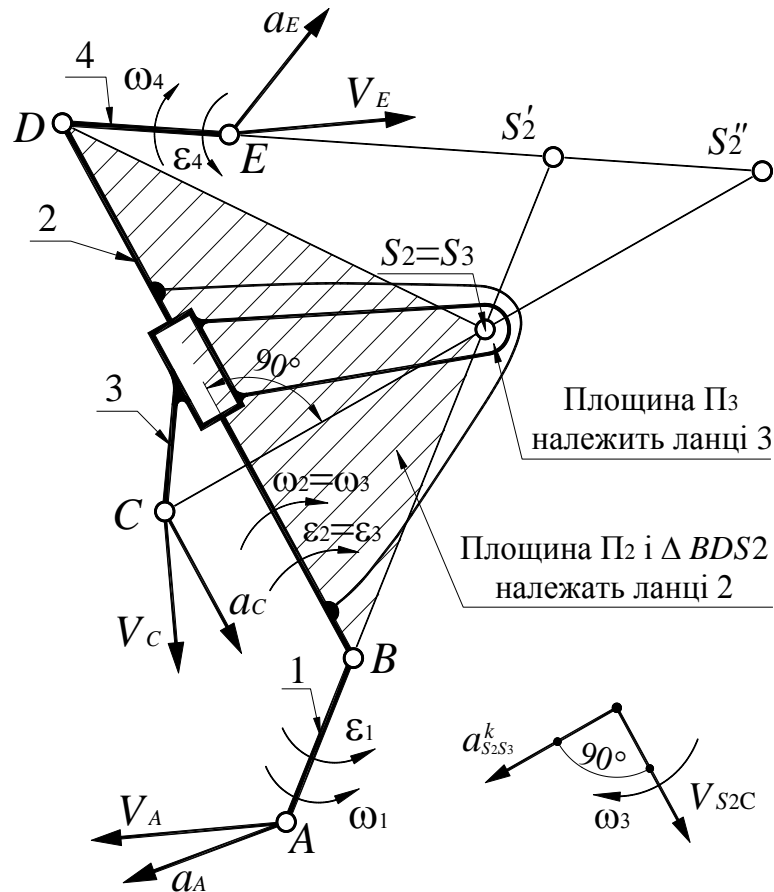


Рис. 2.20. Група Ассура 3-го класу

Задача визначення швидкостей і прискорень такої групи розв'язується в наступній послідовності:

1. Визначити швидкість (прискорення) точки S_2 , яка належить базовій ланці 2. Для цього необхідно використати задані значення швидкостей (прискорень) точок A і C .

2. Визначити швидкість (прискорення) точки D , скориставшись визначеним значенням швидкості (прискорення) точки S_2 і заданими значеннями швидкості (прискорення) точки E .

3. Після визначення швидкості (прискорення) двох точок базової ланки 2 (S_2 і D) визначити ω_2 , ε_2 , а також швидкість і прискорення точки B .

4. Визначити кутові швидкості і прискорення ланок 1 і 4.

Примітка: На перший погляд здається, що для визначення швидкості і прискорення точки базової ланки 2 можна було б скористатись точкою S_2' . Дійсно визначити швидкість і прискорення цієї точки дещо простіше, оскільки для цього немає потреби у використанні теорії складного руху точки. Але після визначення V_{S_3} і a_{S_3} , необхідно було б визначити швидкість і прискорення ще однієї точки ланки 2 (точки C_2) і тільки після цього можна було б визначити швидкість і прискорення точок B і D .

Побудова плану швидкостей

Швидкість точки S_2 можливо визначити з рівнянь

$$\begin{aligned}\vec{V}_{S_2} &= \vec{V}_{S_3} + \vec{V}_{S_2S_3} = \vec{V}_C + \vec{V}_{S_3/C} + \vec{V}_{S_2S_3}; \\ \vec{V}_{S_2} &= \vec{V}_B + \vec{V}_{S_2/B} = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} + \vec{V}_{S_2/B}.\end{aligned}\quad (2.53)$$

В рівнянні (2.53) враховано, що $\vec{V}_{S_3} = \vec{V}_C + \vec{V}_{S_3/C}$ і $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$.

Відзначимо, що вектори $\vec{V}_{S_3/C}$ та $\vec{V}_{S_2S_3}$ спрямовані перпендикулярно CS_2 , а вектори $\vec{V}_{B/A}$ та $\vec{V}_{S_2/B}$ – перпендикулярно AB . В кожному з двох рівнянь (2.53) міститься по три невідомих: вектор \vec{V}_{S_2} (спільний для обох рівнянь) і величини сум векторів $\vec{V}_{S_3/C} + \vec{V}_{S_2S_3}$ і $\vec{V}_{B/A} + \vec{V}_{S_2/B}$.

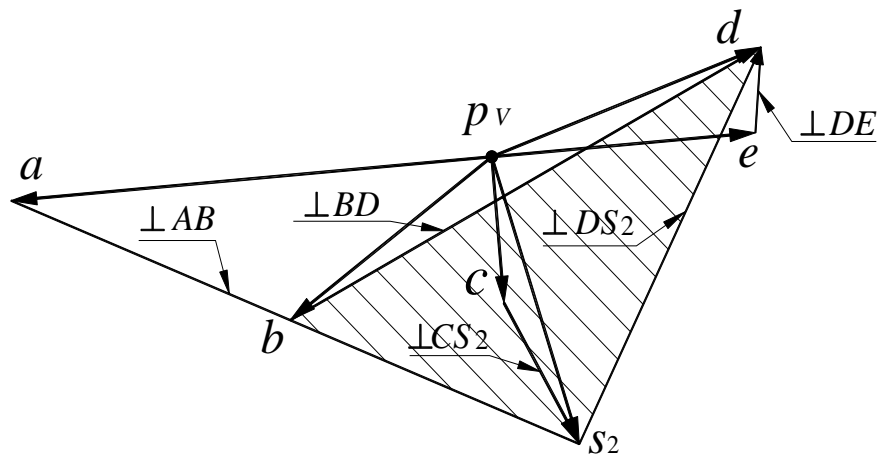


Рис. 2.21. План швидкостей

Розв'язуючи спільно рівняння (2.53) графічним способом знаходимо вектор швидкості точки S_2 , що належить ланці 2. Для цього з полюса p_v (див. рис. 2.21) в масштабі μ_v відкладаємо відрізки $p_v a$, $p_v c$ і $p_v e$. Потім з точки a проводимо промінь перпендикулярно AB , а з точки c промінь перпендикулярно CS_2 (зазначені напрямки показані і на плані швидкостей на рис. 2.21). На перетині цих променів знаходимо кінець вектора швидкості точки

S_2 (на плані швидкостей це точка s_2). З урахуванням масштабу побудов маємо

$$V_{s_2} = p_V s_2 \cdot \mu_V.$$

Далі необхідно знайти швидкість точки D . Для цього складемо два векторні рівняння, спочатку розглядаючи точку D як точку 4-ї ланки, а потім як точку 2-ї ланки, відповідно прийнявши спочатку як полюс точку S_2 , а потім точку E . Рівняння матимуть вигляд

$$\begin{aligned}\vec{V}_D &= \vec{V}_{S_2} + \vec{V}_{D/S_2}; \\ \vec{V}_D &= \vec{V}_E + \vec{V}_{D/E}.\end{aligned}\tag{2.54}$$

В рівняннях (2.54) вектор $\vec{V}_{D/S_2} \perp DS_2$, а вектор $\vec{V}_{D/E} \perp DE$, \vec{V}_E та \vec{V}_{S_2} відомі повністю, тобто рівняння (2.54) розв'язати можливо.

Розв'язуючи спільно рівняння (2.54), знаходимо відрізок $p_V d$, який у масштабі зображує швидкість точки D

$$V_D = p_V d \cdot \mu_V.$$

Знаходимо швидкість точки B , склавши рівняння

$$\begin{aligned}\vec{V}_B &= \vec{V}_D + \vec{V}_{B/D}; \\ \vec{V}_B &= \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}.\end{aligned}\tag{2.55}$$

У рівняннях (2.55) вектор $\vec{V}_{B/D} \perp BD$, а вектор $\vec{V}_{B/A} \perp BA$.

Спільно розв'язуючи рівняння (2.55) графічно, знаходимо кінець вектора швидкості точки B (на плані швидкостей представлений точкою b). З урахуванням масштабу побудов маємо

$$V_B = p_V b \cdot \mu_V.$$

Кутові швидкості ω_1 , ω_4 і $\omega_3 = \omega_2$ знаходимо через відповідні відносні швидкості ($V_{B/A}$, $V_{D/E}$, V_{D/S_2})

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{V_{B/A}}{AB} = \frac{ab \cdot \mu_E}{AB}; \\ \omega_4 &= \frac{V_{D/E}}{DE} = \frac{de \cdot \mu_E}{DE}; \\ \omega_3 &= \omega_2 = \frac{V_{D/S_2}}{S_2 D}.\end{aligned}\tag{2.56}$$

Напрямки кутових швидкостей визначаємо в залежності від напрямків векторів $\vec{V}_{B/A}$, $\vec{V}_{D/E}$ і \vec{V}_{D/S_2} , позначених в точки B , D і D відповідно, відносно точок A , E і S_2 .

Швидкість точки B можна було б знайти і за допомогою теореми подібності: на плані швидкостей (рис. 2.21) трикутник Δs_2bd подібний трикутнику ΔS_2BD на ланці 2 (рис. 2.20), але повернутий на 90° за напрямком ω_2 .

Побудова плану прискорень

Завдання про визначення прискорень розв'язується аналогічно задачі про дослідження швидкостей. Тут, як і для визначення швидкостей, користуємося особливою точкою S_2 , яка належить ланці 2. Спочатку розглянемо точку S_2 в складному русі, будемо вважати, що ланка 3 (разом з площиною Π_3) здійснює переносний рух. Ланка 2 рухається разом з ланкою 3 і відносно 3 вздовж BD . В такому випадку прискорення точки S_3 – це переносне прискорення для точки S_2 і векторне рівняння для точки S_2 матиме вигляд

$$\vec{a}_{S_2} = \vec{a}_{S_3} + \vec{a}_{S_2S_3}^k + \vec{a}_{S_2S_3}^\tau. \quad (2.57)$$

В рівнянні (2.57) вектор прискорення точки S_3 буде

$$\vec{a}_{S_3} = \vec{a}_C + \vec{a}_{S_3/C}^n + \vec{a}_{S_3/C}^\tau \quad (\vec{a}_{S_3/C}^n \parallel S_3C, \vec{a}_{S_3/C}^\tau \perp S_3C). \quad (2.58)$$

Тоді рівняння (2.57) з урахуванням (2.58) та за умови, якщо вектори з однаковими напрямками записати поруч, матиме вигляд

$$\vec{a}_{S_2} = \vec{a}_C + \overrightarrow{a_{S_3/C}^n} + \overrightarrow{a_{S_2C}^k} + \vec{a}_{S_3/C}^\tau + \vec{a}_{S_2S_3}^\tau. \quad (2.59)$$

В рівнянні (2.59) напрямки векторів наступні: $\overrightarrow{a_{S_3/C}^n} + \overrightarrow{a_{S_2S_3}^k} \parallel CS_2$; $\vec{a}_{S_3/C}^\tau + \vec{a}_{S_2S_3}^\tau \perp CS_2$. На рис. 2.20 справа внизу показано визначення напрямку $\vec{a}_{S_2C}^k$.

Окремо рівняння (2.59) розв'язати не можливо, оскільки в ньому 3 невідомих: величина суми векторів $\vec{a}_{S_3/C}^\tau + \vec{a}_{S_2S_3}^\tau$, а також величина і напрямок прискорення \vec{a}_{S_2} . Величина вектора $\vec{a}_{S_3/C}^n$ та $\vec{a}_{S_2S_3}^k$ може бути знайдена за формулами

$$\begin{aligned} a_{S_3/C}^n &= \omega_3^2 \cdot S_3C; \\ a_{S_2S_3}^k &= 2 \cdot \omega_2 \cdot V_{S_2S_3} = 2 \cdot \omega_2 \cdot V_{S_2C}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Розглянемо точку S_2 як точку ланки 2, яка рухається плоскопаралельно. Приймаючи в якості полюса точку B ланки 2, запишемо рівняння

$$\vec{a}_{S_2} = \vec{a}_B + \vec{a}_{S_2/B}^n + \vec{a}_{S_2/B}^\tau. \quad (2.61)$$

Прискорення точки B представимо у вигляді

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{B/A}^\tau \quad (2.62)$$

У рівняннях (2.61) і (2.62) напрямки векторів наступні: $\vec{a}_{B/A}^n$ і $\vec{a}_{S_2/B}^n \parallel AB$, а $\vec{a}_{B/A}^\tau$ і $\vec{a}_{S_2/B}^\tau \perp AB$.

Після підстановки (2.62) у (2.61) з урахуванням однакових напрямків векторів отримаємо

$$\vec{a}_{S_2} = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{S_2/B}^n + \vec{a}_{B/A}^\tau + \vec{a}_{S_2/B}^\tau. \quad (2.63)$$

Величини нормальних відносних прискорень визначаються з рівнянь

$$\begin{aligned} a_{B/A}^n &= \omega_1^2 \cdot AB; \\ a_{S_2/B}^n &= \omega_2^2 \cdot BS_2. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Окремо рівняння (2.63) розв'язати не можливо, оскільки в ньому 3 невідомих: величина суми векторів $\vec{a}_{B/A}^\tau + \vec{a}_{S_2/B}^\tau$, а також величина і напрямок прискорення \vec{a}_{S_2} .

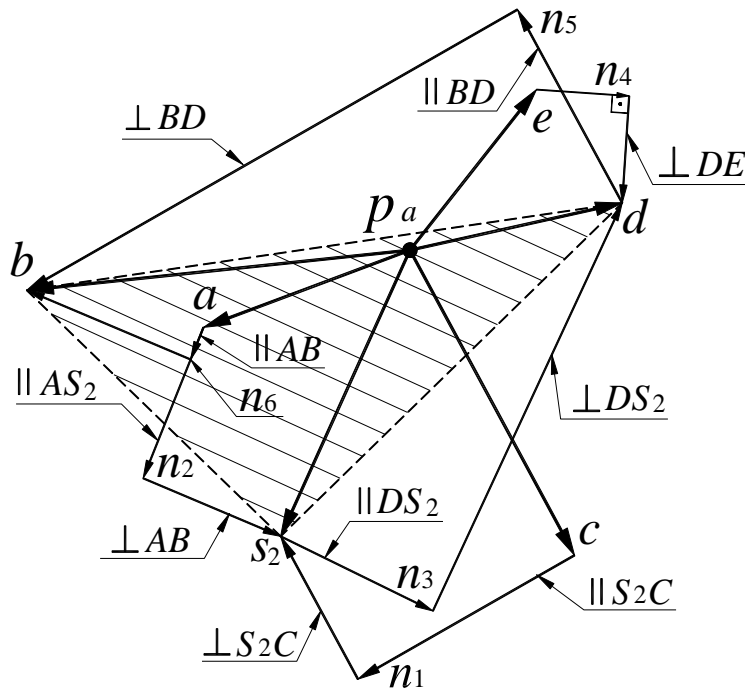


Рис. 2.22. План прискорень

Рівняння (2.59) і (2.63) розв'язуємо графічним способом спільно. Як і при побудові плану швидкостей, спочатку з полюса плану прискорень (точка p_a) в масштабі μ_a відкладаємо вектор заданих прискорень (відрізки $p_a a$, $p_a c$, $p_a e$). З точки c в масштабі відкладаємо суму векторів $\vec{a}_{S_2/C}^n + \vec{a}_{S_2/S_3}^k$. Ці вектори на плані прискорень зображені відрізком cn_1 . Потім з точки n_1

проводимо промінь у напрямку $\perp S_2C$, що відповідає напрямку векторів $\vec{a}_{S_3/C}^\tau$ і \vec{a}_{S_2/S_3}^τ .

Аналогічно з точки a в масштабі відкладаємо суму векторів $\vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{S_2/B}^n$ (відрізок an_2), а з кінця цих векторів проводимо промінь $\perp AB$, що відповідає напрямку векторів $\vec{a}_{B/A}^\tau$ та $\vec{a}_{S_2/B}^\tau$.

На перетині напрямків векторів $\vec{a}_{S_3/C}^\tau + \vec{a}_{S_2S_3}^\tau$ і $\vec{a}_{B/A}^\tau + \vec{a}_{S_2/B}^\tau$ знаходимо кінець вектора прискорень точки S_2 (на плані прискорень представлений точкою s_2). Відповідно величина прискорення

$$a_{S_2} = p_V s_2 \cdot \mu_a.$$

Розглядаючи точку D спочатку як точку ланки 2, а потім як точку 4-ї ланки, складаємо векторні рівняння для a_D

$$\begin{aligned} \vec{a}_D &= \vec{a}_{S_2} + \vec{a}_{D/S_2}^n + \vec{a}_{D/S_2}^\tau; \\ \vec{a}_D &= \vec{a}_E + \vec{a}_{D/E}^n + \vec{a}_{D/E}^\tau, \end{aligned} \quad (2.65)$$

де $a_{D/S_2}^n = \omega_2^2 \cdot DS_2$, $a_{D/E}^n = \omega_4^2 \cdot DE$.

Відповідно з точок s_2 і e на плані прискорень відкладаємо в масштабі вектори $\vec{a}_{D/S_2}^n \parallel DS_2$ і $\vec{a}_{D/E}^n \parallel DE$. Кінцями цих векторів є відповідно точки n_3 і n_4 . З точок n_3 і n_4 проводимо промені у напрямку відповідно до прискорень $\vec{a}_{D/S_2}^\tau \perp DS_2$ і $\vec{a}_{D/E}^\tau \perp DE$. На перетині цих променів знаходимо кінець вектора прискорення точки D (на плані прискорень представлений точкою d)

$$a_D = p_V d \cdot \mu_a.$$

Знаючи прискорення точки D , можна знайти прискорення точки B , розглянувши її спочатку як точку ланки 2, а потім як точку ланки 1. Прискорення a_B знаходимо з рівнянь

$$\begin{aligned} \vec{a}_B &= \vec{a}_D + \vec{a}_{B/D}^n + \vec{a}_{B/D}^\tau; \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{B/A}^\tau, \end{aligned} \quad (2.66)$$

де $a_{B/D}^n = \omega_2^2 \cdot BD$, $a_{B/A}^n = \omega_1^2 \cdot BA$.

На плані прискорень в масштабі відкладаємо вектори $\vec{a}_{B/D}^n \parallel BD$ і $\vec{a}_{B/A}^n \parallel BA$ з точок d і a відповідно. Кінцями цих векторів є точки n_5 і n_6 . З точок n_5 і n_6 проводимо промені у напрямках відповідних прискорень $\vec{a}_{B/D}^\tau \perp BD$ і $\vec{a}_{B/A}^\tau \perp BA$. На перетині цих променів знаходимо кінець вектора прискорення точки B (на плані прискорень представлений точкою b).

Кутові прискорення знаходимо з рівнянь

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{a_{B/A}^\tau}{AB} = \frac{n_6 b \cdot \mu_W}{AB}; \\ \varepsilon_4 &= \frac{a_{E/D}^\tau}{ED} = \frac{n_4 d \cdot \mu_W}{ED}; \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_2 = \frac{a_{S_2/D}^\tau}{S_2 D}.\end{aligned}\quad (2.67)$$

Прискорення точки B можна було б знайти і за допомогою теореми подібності: на плані прискорень (рис. 2.22) заштрихований трикутник $\Delta s_2 bd$ подібний до трикутника $\Delta S_2 BD$ на ланці 2 (рис. 2.20). Напрямки кутових прискорень визначаємо за тією ж методикою, що і напрямки кутових швидкостей.

2.4. Кінематичний аналіз важільних механізмів методом планів

Розглянемо кінематичний аналіз механізмів методом планів, які в сучасній техніці отримали найбільш широке розповсюдження.

а). Кривошипно-повзунний механізм (КПМ)

У КПМ (рис. 2.23) усі три рухливі ланки здійснюють різні види руху твердого тіла на площині:

- 1) кривошип 1 – обертовий рух;
- 2) повзун 3 – поступальний рух;
- 3) шатун 2 – плоско-паралельний (складний) рух.

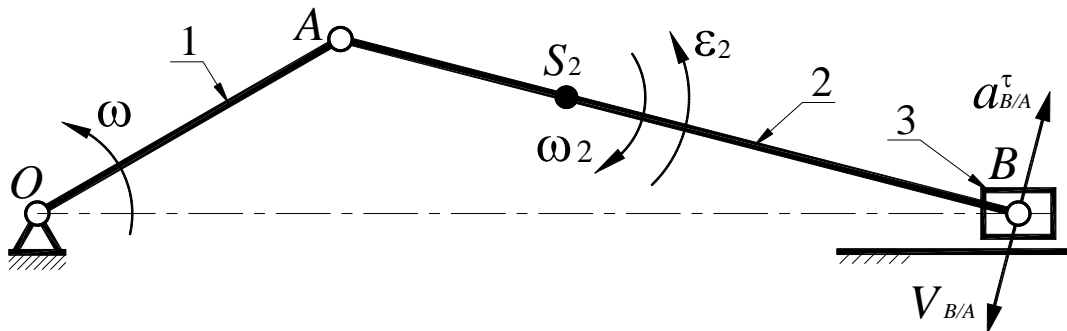


Рис. 2.23. Кінематична схема КПМ

Цей механізм отримав найбільш широке розповсюдження. В якості початкового механізму може бути як кривошип зі стояком (в компресорах) так і повзун зі стояком (в ДВС). В даному випадку в якості вхідної ланки приймаємо кривошип.

Плани швидкостей і прискорень будуються у відповідних масштабах. Надалі масштаб будемо розглядати як відношення фізичної величини до відрізка в міліметрах, який зображує дану величину.

Побудова плану швидкостей

1) Визначаємо швидкість точки A кривошипа.

$$V_A = \omega \cdot OA.$$

При цьому враховуємо, що $V_A = V_{A_1} = V_{A_2}$, тобто V_A також є і швидкістю точки A шатуна.

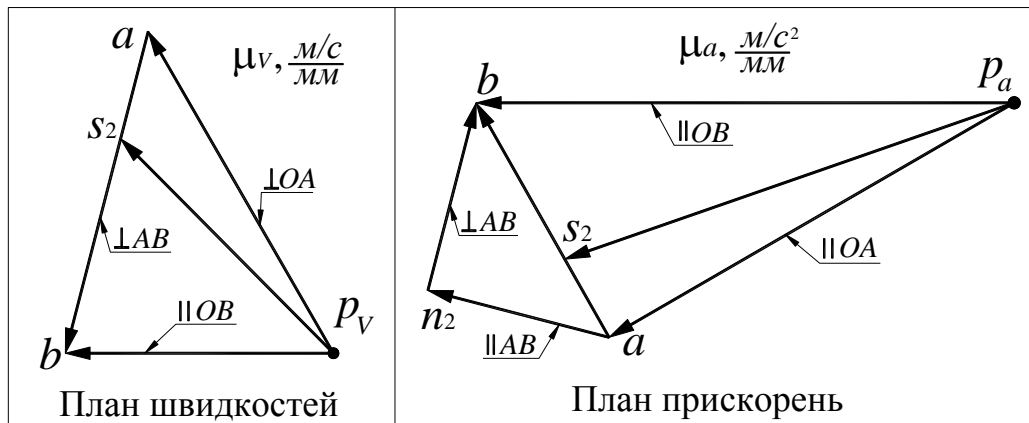


Рис. 2.24. Плани швидкостей і прискорень для КПМ

2) Визначаємо швидкість точки B .

Розглядаючи точку B як точку шатуна й прийнявши в якості полюса точку A , запишемо векторне рівняння

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}. \quad (2.68)$$

Напрямки векторів у рівнянні (2.68) наступні: $\vec{V}_B \parallel OB$; $\vec{V}_A \perp OA$; $\vec{V}_{B/A} \perp AB$ (ці напрямки зазначені й на плані швидкостей на рис. 2.24).

Обираємо масштаб плану швидкостей μ_v і з полюса плану швидкостей p_v відкладаємо в обраному масштабі відрізок $p_v a = V_A / \mu_v$, що зображує величину вектора швидкості точки A . З кінця цього відрізка (точка a) проводимо промінь $\perp AB$ (за напрямком швидкості $\vec{V}_{B/A}$) до перетину з напрямком швидкості точки B , проведеним з полюса p_v , і знаходимо кінець вектора швидкості точки B (див. рис. 2.24). Для визначення швидкості точки S_2 (центр мас шатуна) скористаємося теоремою подібності для планів. За цією теоремою фігура на плані швидкостей as_2b подібна до фігури AS_2B на механізмі але повернена на 90° за напрямком ω_2 .

Із плану швидкостей знаходимо $V_B = p_V b \cdot \mu_V$, $V_{S_2} = p_V s_2 \cdot \mu_V$, $V_{B/A} = ab \cdot \mu_V$. Оскільки $V_{B/A} = AB \cdot \omega_2$, кутова швидкість шатуна буде рівна

$$\omega_2 = \frac{V_{B/A}}{AB} = \frac{ab \cdot \mu_V}{AB}. \quad (2.69)$$

Для визначення напрямку кутової швидкості ω_2 необхідно перенести вектор швидкості $V_{B/A}$ у точку B механізму (див. рис. 2.23) і відносно точки A визначити напрямок ω_2 .

Побудова плану прискорень

1) Визначаємо прискорення точки A кривошипа. У загальному випадку прискорення точки A буде дорівнювати $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$.

Якщо кутове прискорення відсутнє, тоді $a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA = 0$, і прискорення точки A визначатиметься залежністю

$$a_A = a_A^n = \omega^2 \cdot OA. \quad (2.70)$$

2) Визначаємо прискорення точки B .

Розглядаючи точку B як точку шатуна й прийнявши в якості полюса точку A , запишемо векторне рівняння

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{B/A}^\tau. \quad (2.71)$$

Напрямки векторів у рівнянні (2.71) наступні: $\vec{a}_A \parallel OA$, $\vec{a}_{B/A}^n \parallel AB$, $\vec{a}_{B/A}^\tau \perp AB$ (ці ж напрямки зазначені й на плані прискорень на рис. 2.24). Прискорення точки B відносно точки A дорівнює

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{B/A}^\tau, \quad (2.72)$$

де

$$\begin{aligned} a_{B/A}^n &= \omega_2^2 \cdot AB, \\ a_{B/A}^\tau &= \varepsilon_2 \cdot AB. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Для побудови плану прискорень необхідно визначити довжини відрізків, що зображують величини прискорень \vec{a}_A і $\vec{a}_{B/A}^n$ на плані.

$$\begin{aligned} p_A a &= a_A / \mu_a, \\ an_2 &= a_{B/A}^n / \mu_a. \end{aligned} \quad (2.74)$$

У рівнянні (2.71) присутні лише дві невідомі (величини векторів \vec{a}_B і $\vec{a}_{B/A}^\tau$), тобто його можливо розв'язати.

Графічно розв'язуючи рівняння (2.71), отримуємо план прискорень (див. рис. 2.24). Прискорення точки S_2 знаходимо за допомогою теореми подібності. Із плану прискорень знаходимо

$$\begin{aligned} a_B &= p_a b \cdot \mu_a; \\ a_{S_2} &= p_a s_2 \cdot \mu_a; \\ a_{B/A}^\tau &= n_2 b \cdot \mu_a. \end{aligned} \quad (2.75)$$

З (2.73) кутове прискорення шатуна дорівнює

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{B/A}^\tau}{AB}. \quad (2.76)$$

Для визначення напрямку прискорення ε_2 , необхідно подумки перенести вектор прискорення $\vec{a}_{B/A}^\tau$ в точку B механізму (див. рис. 2.23) і проаналізувати його напрямок відносно точки A .

б). Шарнірний чотириланковий механізм

Кінематична схема механізму показана на рис. 2.25. Задана кутова швидкість кривошипа 1.

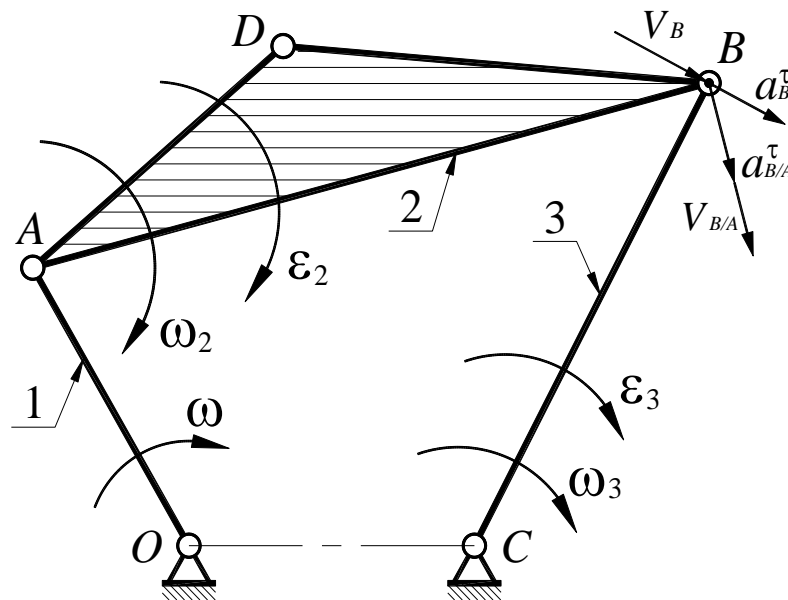


Рис. 2.25. Кінематична схема шарнірного чотириланкового механізму

Побудова плану швидкостей

1) Визначаємо швидкість точки A кривошипа за залежністю

$$V_A = \omega \cdot OA. \quad (2.77)$$

При цьому будемо враховувати, що $V_A = V_{A_1} = V_{A_2}$, тобто V_A – це так само швидкість точки A шатуна.

2) Визначаємо швидкість точки B .

Розглядаючи точку B як точку шатуна й прийнявши в якості полюса точку A , запишемо векторне рівняння

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}. \quad (2.78)$$

Напрямки векторів у рівнянні (2.78) наступні: $\vec{V}_B \perp BC$, $\vec{V}_A \perp OA$, $\vec{V}_{B/A} \perp AB$ (ці напрямки зазначені й на плані швидкостей на рис. 2.26).

Обираємо масштаб плану швидкостей μ_v . З полюса плану швидкостей p_v відкладаємо у вибраному масштабі відрізок $p_v a = V_A / \mu_v$, що зображує величину вектора швидкості точки A . З кінця цього вектора (точки a) проводимо промінь направлений перпендикулярно AB , що відповідає напрямку швидкості $\vec{V}_{B/A}$. Через полюс p_v проводимо перпендикуляр до BC , що відповідає напрямку швидкості точки B . На перетині проведених перпендикулярів знаходимо кінець вектора швидкості точки B (див. рис. 2.26).

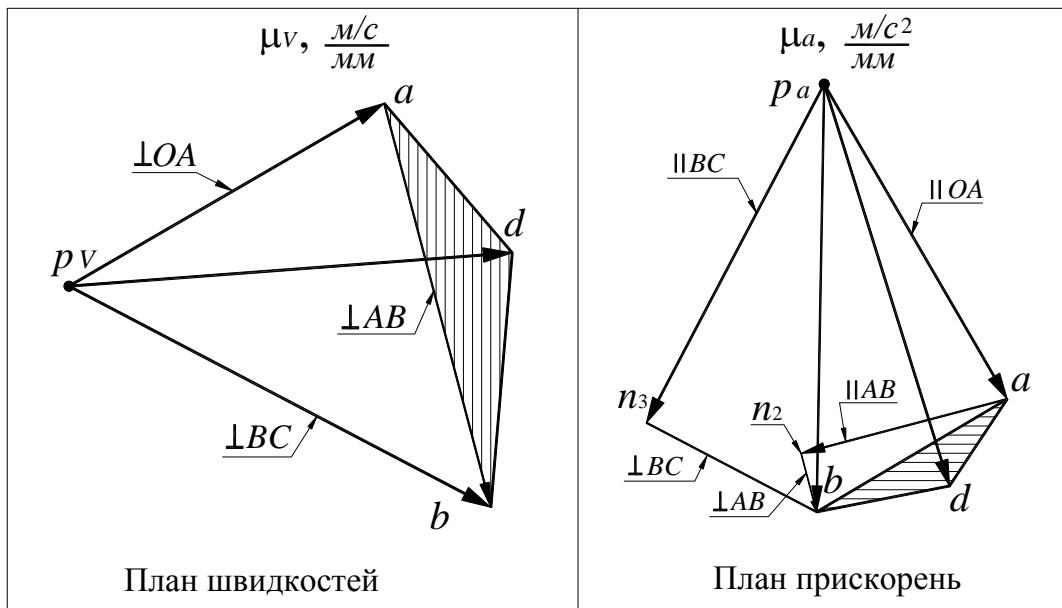


Рис. 2.26. Плани швидкостей і прискорень шарнірного чотириланкового механізму

Для визначення швидкості точки D скористаємося теоремою подібності для планів. За цією теоремою трикутник на плані швидкостей Δabd подібний до трикутника ΔABD (шатун 2) на механізмі, але повернутий на 90° за напрямком ω_2 . Із плану швидкостей знаходимо значення $V_B = p_v b \cdot \mu_v$, $V_D = p_v d \cdot \mu_v$, $V_{B/A} = ab \cdot \mu_v$. Оскільки $V_{B/A} = AB \cdot \omega_2$, тоді кутова швидкість шатуна 2 буде рівна

$$\omega_2 = \frac{V_{B/A}}{AB} = \frac{ab \cdot \mu_V}{AB}. \quad (2.79)$$

Кутова швидкість коромисла 3 дорівнює

$$\omega_3 = \frac{V_B}{BC} = \frac{p_V b \cdot \mu_V}{BC}. \quad (2.80)$$

Для визначення напрямків кутових швидкостей ω_2 і ω_3 необхідно перенести вектори швидкостей $\vec{V}_{B/A}$ і \vec{V}_B у точку B механізму (див. рис. 2.25) і проаналізувати їх напрямки відносно точок A і C відповідно.

Побудова плану прискорень

1) Визначаємо прискорення точки A кривошипа.

У загальному випадку прискорення точки A буде визначатись рівнянням $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$. Якщо кутове прискорення кривошипа відсутнє, тоді $a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA = 0$ й прискорення точки A буде дорівнювати

$$a_A = a_A^n = \omega^2 \cdot OA. \quad (2.81)$$

2) Визначаємо прискорення точки B .

Розглядаючи точку B як точку шатуна й прийнявши в якості полюса точку A , запишемо векторне рівняння

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{B/A}^\tau. \quad (2.82)$$

Напрямки векторів у рівнянні (2.82) наступні: $\vec{a}_A \parallel OA$, $\vec{a}_{B/A}^n \parallel AB$, $\vec{a}_{B/A}^\tau \perp AB$ (ці ж напрямки зазначені й на плані прискорень на рис. 2.26). Величини векторів у рівнянні (2.82) визначаються залежностями

$$\begin{aligned} a_{B/A}^n &= \omega_2^2 \cdot AB, \\ a_{B/A}^\tau &= \varepsilon_2 \cdot AB. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Рівняння (2.82) розв'язати не можливо, оскільки в ньому три невідомі: величина й напрямок вектора \vec{V}_B , і величина вектора $\vec{a}_{B/A}^\tau$. Тому запишемо друге рівняння, розглядаючи точку B як точку ланки 3

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{B/C}^n + \vec{a}_{B/C}^\tau = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau. \quad (2.84)$$

У рівнянні (2.84) $a_B^n = a_{B/C}^n = \omega_3^2 \cdot BC$.

Для побудови плану прискорень необхідно визначити довжини відрізків, що зображують величини прискорень \vec{a}_A , $\vec{a}_{B/A}^n$ та $\vec{a}_B^n = \vec{a}_{B/C}^n$. Їх можна визначити за залежностями

$$\begin{aligned}
 p_a a &= a_A / \mu_a, \\
 a n_2 &= a_{B/A}^n / \mu_a, \\
 p_a n_3 &= a_B^n / \mu_a.
 \end{aligned}
 \tag{2.85}$$

Спільно графічно розв'язуючи рівняння (2.82) і (2.84) будемо план прискорень (рис. 2.26). Для визначення прискорення точки D скористаємося теоремою подібності для планів. За цією теоремою трикутник на плані прискорень Δabd подібний до трикутника ΔABD (шатун 2) на механізмі. Із плану прискорень знаходимо

$$\begin{aligned}
 a_B &= p_a b \cdot \mu_a, \\
 a_D &= p_a d \cdot \mu_a, \\
 a_{B/A}^\tau &= b n_2 \cdot \mu_a, \\
 a_B^\tau &= b n_3 \cdot \mu_a.
 \end{aligned}
 \tag{2.86}$$

Кутові прискорення ланок 2 і 3 знаходяться за залежностями

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_2 &= a_{B/A}^\tau / AB, \\
 \varepsilon_3 &= a_B^\tau / BC.
 \end{aligned}
 \tag{2.87}$$

Для визначення напрямків прискорень ε_2 і ε_3 переносимо вектори прискорення $\vec{a}_{B/A}^\tau$ й \vec{a}_B^τ у точку B механізму (див. рис. 2.25) і аналізуємо їх напрямки відносно точки A і точки C відповідно.

в). Кулісний механізм

Механізм на рис. 2.27 утворений вихідним механізмом (кривошип і стояк) і двома групами Ассура 2-го класу. Ланки 2 і 3 утворюють групу 3-го виду, а 4 і 5 – 2-го виду. У механізмі кривошип 1 здійснює обертовий рух, а куліса 3 – зворотно-обертовий. Задана кутова швидкість кривошипа $\omega = \text{const}$.

Побудова плану швидкостей

Визначаємо швидкість точки A кривошипа

$$V_A = \omega \cdot OA. \tag{2.88}$$

Будемо враховувати, що $V_A = V_{A_1} = V_{A_2}$, тобто V_A – це так само швидкість точки A кулісного каменю 2. Далі визначаємо швидкість \vec{V}_{A_3} точки куліси A_3 , яка в цей момент співпадає з центром шарніра A (див. рис. 2.27). Точку A_3 розглянемо в складному русі: будемо вважати, що ланка 2 здійснює

переносний рух, разом з 2 рухається ланка 3, окрім того ланка 3 рухається відносно 2 вздовж BC . При цьому швидкість $V_{A_2} = V_A$ буде переносною швидкістю для точки A_3 . Тоді швидкість точки A_3 може бути знайдена

$$\vec{V}_{A_3} = \vec{V}_A + \vec{V}_{A_3A} \quad (2.89)$$

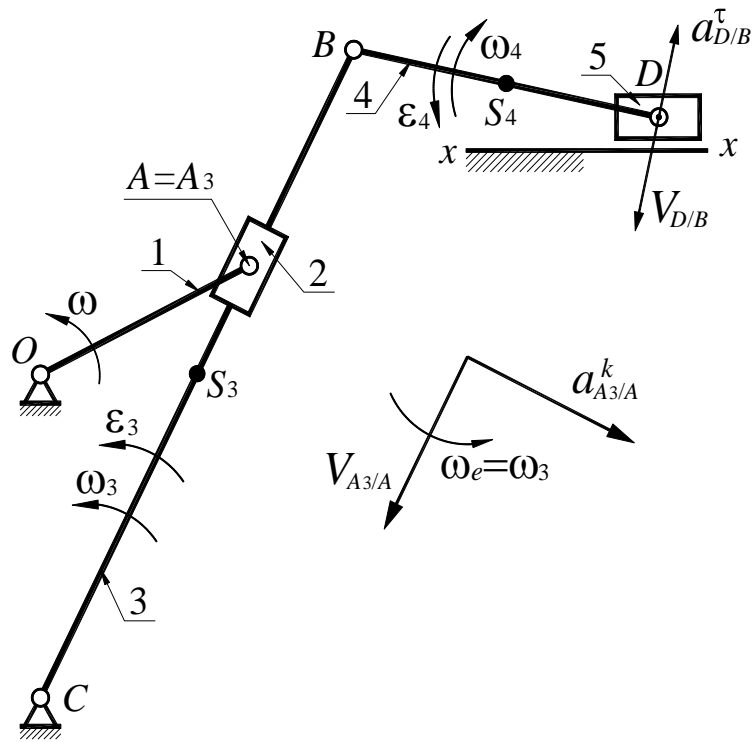


Рис. 2.27. Кулісний механізму

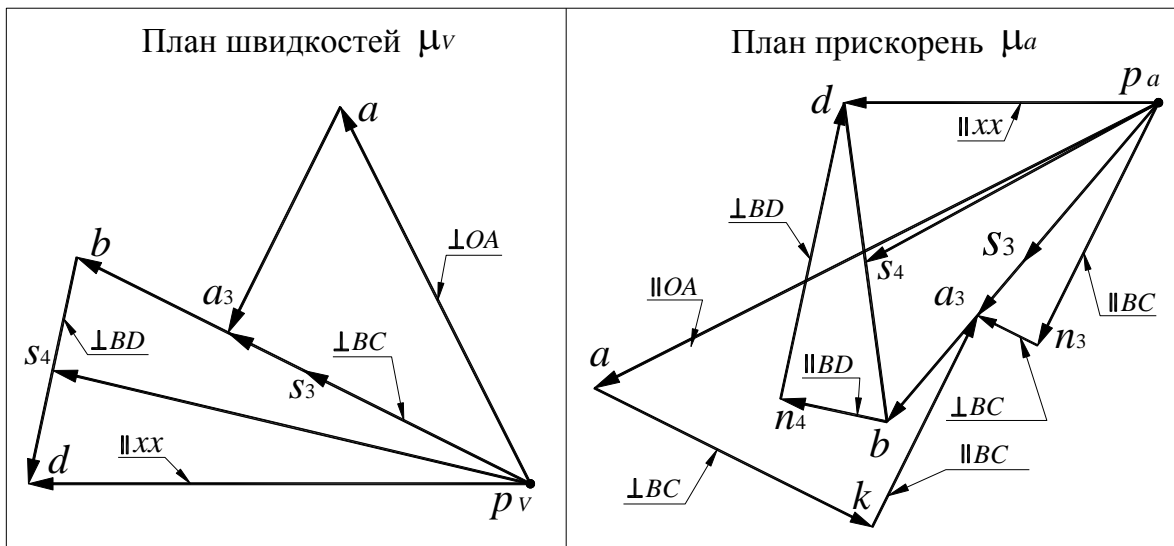


Рис. 2.28. Плани швидкостей і прискорень кулісного механізму

Напрямки векторів у рівнянні (2.89) наступні: $\vec{V}_A \perp OA$, $\vec{V}_{A_3} \perp BC$, $\vec{V}_{A_3A} \parallel BC$ (ці ж напрямки зазначені й на плані швидкостей рис. 2.28). Рівнян-

ня (2.89) містить дві невідомі, тобто його можливо розв'язати. План швидкостей, побудований за рівнянням (2.89) показаний на рис. 2.28. Відрізок, що зображує V_A на плані швидкостей знаходиться, як $p_V a = V_A / \mu_V$. Швидкість будь-якої точки куліси спрямована перпендикулярно BC , а величина пропорційна відстані від центру обертання куліси (точка C) до розглянутої точки. Тоді $V_B = V_{A_3} \cdot (BC / AC)$.

З плану швидкостей визначаємо

$$V_{A_3} = p_V a_3 \cdot \mu_V,$$

$$V_B = p_V b \cdot \mu_V,$$

$$V_{A_3 A} = a a_3 \cdot \mu_V.$$

Відзначимо, що $V_{A_3 A}$ – це швидкість ковзання кулісного каменю вздовж куліси.

Кутова швидкість куліси дорівнює

$$\omega_3 = V_{A_3} / AC = V_B / BC. \quad (2.90)$$

Оскільки ланки 2 і 3 утворюють поступальну пару, то $\omega_2 = \omega_3$.

Визначаємо швидкість точки D .

Розглядаючи точку D як точку ланки 4 й прийнявши в якості полюса точку B , запишемо векторне рівняння

$$\vec{V}_D = \vec{V}_B + \vec{V}_{D/B}. \quad (2.91)$$

Напрямки векторів у рівнянні (2.91) наступні: $\vec{V}_D \parallel xx$, $\vec{V}_B \perp BC$, $\vec{V}_{D/B} \perp BD$ (ці ж напрямки зазначені й на плані прискорень на рис. 2.28). У рівнянні (2.91) містяться лише дві невідомі (величини векторів V_D і $V_{D/B}$), тобто його можливо розв'язати. Для цього з кінця вектора \vec{V}_B проводимо промінь перпендикулярно BD , а з полюса p_V – паралельно xx . На перетині цих променів знаходимо кінець вектора V_D . Оскільки $V_{D/B} = BD \cdot \omega_4$, тоді кутова швидкість шатуна 4 буде рівна

$$\omega_4 = \frac{V_{D/B}}{BD} = \frac{bd \cdot \mu_V}{BD}. \quad (2.92)$$

Для визначення напрямку кутової швидкості ω_4 необхідно перенести вектор швидкості $\vec{V}_{D/B}$ у точку D механізму (див. рис. 2.27) і проаналізувати напрямок цієї швидкості відносно точки B .

Побудова плану прискорень

Визначаємо прискорення точки A кривошипа за залежністю

$$a_A = a_A^n = \omega^2 \cdot OA. \quad (2.93)$$

Будемо враховувати, що $a_A = a_{A_1} = a_{A_2}$, тобто a_A – це так само прискорення точки A кулісного каменю 2. Далі визначаємо прискорення a_{A_3} точки куліси A_3 , яка в цей момент збігається із центром шарніра A (див. рис. 2.27). Точку A_3 розглянемо в складному русі. При цьому прискорення a_A буде переносним прискоренням для точки A_3 . Відносне прискорення $a_r = a_{A_3/A}$ – це прискорення точки A_3 відносно точки A , яке спрямовано уздовж куліси BC . Оскільки переносна швидкість не поступальна, то крім переносного й відносного прискорень буде й коріолісове прискорення. Рух ланки 2 будемо вважати переносним. При цьому ланка 3 здійснює рух разом з ланкою 2 і відносно ланки 2 уздовж BC . У цьому випадку переносна кутова швидкість рівна $\omega_e = \omega_2 = \omega_3$.

Прискорення a_{A_3} точки A_3 визначається рівнянням

$$\vec{a}_{A_3} = \vec{a}_A + \vec{a}_{A_3/A}^k + \vec{a}_{A_3/A}^\tau + \vec{a}_{A_3/A}^n. \quad (2.94)$$

У рівнянні (2.94) прискорення $a_{A_3/A}^n = \frac{(V_{A_3/A})^2}{\rho} = 0$, оскільки траєкторією відносного руху є пряма лінія, тобто радіус кривизни траєкторії $\rho = 0$. Тоді рівняння (2.94) прийме вигляд

$$\vec{a}_{A_3} = \vec{a}_A + \vec{a}_{A_3/A}^k + \vec{a}_{A_3/A}^\tau. \quad (2.95)$$

Напрямки векторів у рівнянні (2.95) наступні: $\vec{a}_A \parallel OA$, $\vec{a}_{A_3/A}^k \perp BC$, $\vec{a}_{A_3/A}^\tau \parallel BC$ (ці ж напрямки зазначені й на плані прискорень на рис. 2.28). У плоских механізмах кут між векторами кутової і лінійної швидкостей рівний 90° , тоді модуль коріолісового прискорення буде дорівнювати $a_{A_3/A}^k = 2 \cdot \omega_3 \cdot V_{A_3/A}$. Напрямок цього прискорення визначаємо за рекомендацією Жуковського (див. рис. 2.27).

Рівняння (2.95) містить три невідомі (величина й напрямок вектора \vec{a}_{A_3} і величина вектора $\vec{a}_{A_3/A}^\tau$), тобто його можливо розв'язати. Складемо друге рівняння, розглянувши точку A_3 як точку ланки 3, що здійснює обертовий рух

$$\vec{a}_{A_3} = \vec{a}_{A_3}^n + \vec{a}_{A_3}^\tau. \quad (2.96)$$

Напрямки векторів у рівнянні (2.96) наступні: $\vec{a}_{A_3}^n \parallel BC$, $\vec{a}_{A_3}^\tau \perp BC$. Це рівняння так само містить три невідомі. У рівнянні (2.96) нормальне прискорення точки A_3 дорівнює

$$a_{A_3}^n = \omega_3^2 \cdot A_3C.$$

Для побудови плану прискорень визначаємо довжини відрізків

$$p_a a = a_A / \mu_a,$$

$$ak = a_{A_3A}^k / \mu_a,$$

$$p_a n_3 = a_{A_3}^n / \mu_a.$$

Спільно графічно розв'язавши рівняння (2.95) і (2.96), одержуємо план прискорень (див. рис. 2.28).

Прискорення точки B знаходимо за пропорцією $a_B = a_{A_3} \cdot (BC / AC)$.

Із плану прискорень знаходимо величини прискорень

$$\begin{aligned} a_{A_3} &= p_a a_3 \cdot \mu_a, \\ a_B &= p_a b \cdot \mu_a, \\ a_{A_3A}^\tau &= ka_3 \cdot \mu_a, \\ a_{A_3}^\tau &= n_3 a_3 \cdot \mu_a. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Кутове прискорення куліси дорівнює $\varepsilon_3 = \frac{a_{A_3}^\tau}{A_3C} = \frac{n_3 a_3 \cdot \mu_a}{A_3C}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$.

Визначаємо прискорення точки D .

Розглядаючи точку D як точку ланки 4 й прийнявши в якості полюса точку B , запишемо векторне рівняння

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{D/B}^n + \vec{a}_{D/B}^\tau. \quad (2.98)$$

Напрямки векторів у рівнянні (2.98) наступні: $\vec{a}_D \parallel xx$, $\vec{a}_{D/B}^n \parallel BD$, $\vec{a}_{D/B}^\tau \perp BD$ (ці ж напрямки зазначені й на плані прискорень рис. 2.28). Рівняння (2.98) розв'язати можливо, воно містить 2 невідомі: величини a_D і $a_{D/B}^\tau$. Прискорення точки D відносно точки B дорівнює

$$\vec{a}_{D/B} = \vec{a}_{D/B}^n + \vec{a}_{D/B}^\tau, \quad (2.99)$$

де

$$\begin{aligned} a_{D/B}^n &= \omega_4^2 \cdot BD, \\ a_{D/B}^\tau &= \varepsilon_4 \cdot BD. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Визначаємо довжину відрізка $n_4 b = \frac{a_{D/B}^n}{\mu_a}$, який зображає $a_{D/B}^n$.

Для визначення прискорення точки D з кінця вектора прискорення точки B відкладаємо відрізок $n_4 b$, що спрямований $\parallel BD$, а з кінця цього відрізка проводимо промінь перпендикулярно BD і на перетині його з променем, проведеним з полюса p_a паралельно xx , знаходимо кінець вектора \vec{a}_D (див. рис. 2.28).

Із плану прискорень знаходимо

$$\begin{aligned} a_D &= p_a d \cdot \mu_a, \\ a_{D/B}^\tau &= n_4 d \cdot \mu_a. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Кутове прискорення шатуна 4 знаходиться як $\varepsilon_4 = \frac{a_{D/B}^\tau}{BD}$. Для визначення напрямку цього прискорення необхідно вектор $\vec{a}_{D/B}^\tau$ перенести в точку D і проаналізувати його напрямок відносно точки B .

2.5. Аналітична кінематика

На прикладі кривошипно-повзунного механізму (КПМ) розглянемо аналітичний метод кінематичного аналізу.

Нехай задані розміри ланок механізму і кутова швидкість кривошипа ω . Необхідно знайти переміщення, швидкість і прискорення повзуна в залежності від кутової швидкості кривошипа і його положення (координата φ).

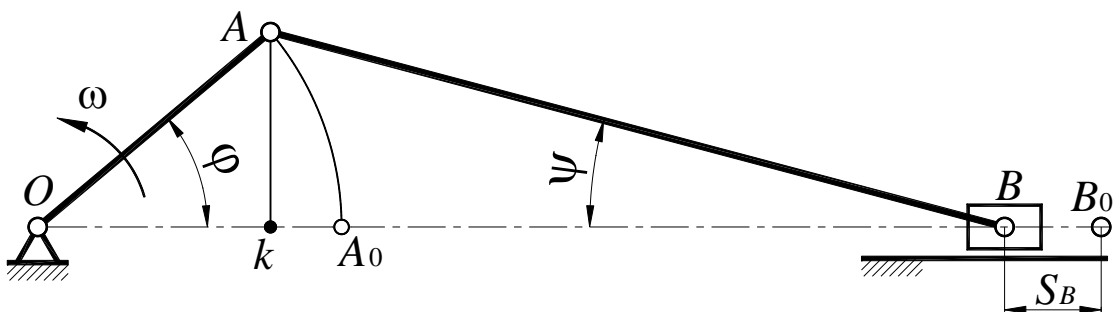


Рис. 2.29. Кінематична схема КПМ

Положення механізму, коли повзун займає крайнє праве положення, приймаємо за початкове. Для зручності позначимо $l_{OA} = r$; $l_{AB} = l$; $\frac{r}{l} = \lambda$. На рис. 2.29 показане поточне положення механізму, хід повзуна становить $S_B = OB_0 - OB$.

З рис. 2.29 маємо

$$\begin{aligned} OB_0 &= r + l; \\ OB &= Ok + kB = r \cdot \cos \varphi + l \cdot \cos \psi. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Тоді

$$S_B = r + l - r \cdot \cos \varphi - l \cdot \cos \psi. \quad (2.103)$$

У виразі (2.103) змінна ψ не є незалежною координатою. Виразимо ψ через незалежну координату φ . З рис. 2.29 можна записати $Ak = r \cdot \sin \varphi = l \cdot \sin \psi$, тоді

$$\sin \psi = \sin \varphi \cdot (r / l) = \sin \varphi \cdot \lambda. \quad (2.104)$$

Необхідно знайти $\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi}$. З урахуванням (2.104) одержимо

$$\cos \psi = \sqrt{1 - (\lambda \cdot \sin \varphi)^2} = [1 - (\lambda \cdot \sin \varphi)^2]^{1/2}. \quad (2.105)$$

Розкладемо корінь у ряд по біному Ньютона

$$[1 - (\lambda \cdot \sin \varphi)^2]^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}(\lambda \cdot \sin \varphi)^2 - \frac{1}{8}(\lambda \cdot \sin \varphi)^4 - \frac{1}{16}(\lambda \cdot \sin \varphi)^6 - \dots$$

Зазвичай значення λ перебуває в діапазоні $\lambda = 1/2 \div 1/4$. При $\lambda = 1/3$ третій член ряду буде рівний $\frac{1}{8}(\lambda \cdot \sin \varphi)^4 = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} \cdot \sin \varphi \right)^4 = \frac{1}{648}(\sin \varphi)^4$, тобто максимальне значення становить лише 0,15%, чим можна знехтувати. Тоді наближене значення $\cos \psi$ буде дорівнювати

$$\cos \psi = [1 - (\lambda \cdot \sin \varphi)^2]^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}(\lambda \cdot \sin \varphi)^2. \quad (2.106)$$

Після підстановки (2.106) в (2.103) одержимо

$$S_B \approx r + l - r \cdot \cos \varphi - l \cdot \left[1 - \frac{1}{2}(\lambda \cdot \sin \varphi)^2 \right] \approx r - r \cdot \cos \varphi + \frac{1}{2} r \cdot \lambda \cdot \sin^2 \varphi. \quad (2.107)$$

Якщо r винести за дужки, одержимо

$$S_B \approx r \left(1 - \cos \varphi + \frac{1}{2} \lambda \cdot \sin^2 \varphi \right). \quad (2.108)$$

Продиференціювавши (2.108) за φ , одержимо аналог швидкості повзуна

$$\frac{dS_B}{d\varphi} = S_B' \approx r \cdot (\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi). \quad (2.109)$$

З розглянутого раніше питання про аналоги швидкостей і прискорень швидкість дорівнює $V_B = S_B' \cdot \omega$. Тоді, з урахуванням (2.109) одержимо

$$V_B = r\omega \cdot (\sin \varphi + \frac{1}{2}\lambda \sin 2\varphi). \quad (2.110)$$

Примітка: такий же результат можна одержати, представивши у виразі (2.108) значення кута φ у вигляді $\varphi = \omega \cdot t$ і продиференціювавши його за t .

Продиференціювавши (2.109) за φ , одержимо аналог прискорення повзуна

$$\frac{d^2 S_B}{d\varphi^2} = S_B'' = r \cdot (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi). \quad (2.111)$$

Прискорення повзуна буде

$$a_B = \frac{d^2 S_B}{d\varphi^2} \cdot \omega^2 + \varepsilon \cdot S_B' = S_B'' \cdot \omega^2 + \varepsilon \cdot S_B'. \quad (2.112)$$

При $\omega = \text{const}$, $\varepsilon = 0$, що часто має місце, маємо $a_B = S_B'' \omega^2$. У цьому випадку прискорення повзуна дорівнює

$$a_B = r\omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi). \quad (2.113)$$

2.6. Універсальний шарнір Гука

Шарнір Гука призначений для передачі обертового руху між валами, кут перетинання осей яких є змінним. На рис. 2.30, а) показана кінематична схема механізму. В рамках кінематичного аналізу необхідно встановити зв'язок між кутами повороту вхідного вала 1 і вихідного вала 2, а також зв'язок між кутовими швидкостями. Очевидно, що за один оберт вала 1 вал 2 так само повернеться на один оберт, але при постійній кутовій швидкості вхідного вала швидкість вихідного вала буде змінною.

Кут перетинання осей валів становить α . Кут між стрижнями хрестовини OA і OB рівний $\psi = 90^\circ$. У початковому положенні вилка вхідного вала 1 розташована в площині кресленика. На рис. 2.30, б) показані траєкторії руху точок B і A та названі як траєкторії « β » і « γ » відповідно. Ці траєкторії є окружностями з радіусами OB і OA . При цьому траєкторія « β » проєктується в натуральну величину, а траєкторія « γ » спостерігається під кутом α і на площині проєкцій проєктується у вигляді еліпса.

На рис. 2.30, б) початкове положення хрестовини показане жирною лінією, і кінці хрестовини позначені точками B_0 і A_0 .

Повернемо вхідний вал на кут φ_1 і визначимо кут повороту вихідного вала 2. Відзначимо, що кут повороту вала 1 – це кут повороту стрижня OB у

площині траєкторії « β », а кут повороту вала 2 – це кут повороту стрижня OA у площині траєкторії « γ ». Відомо, що у випадку, якщо одна зі сторін прямого кута паралельна площині проєкцій, то й проєкція цього кута рівна 90° . Отже, кут AOB дорівнює куту A_0OB_0 , тобто так само рівний 90° . Тоді кут A_0OA дорівнює куту BOB_0 , тобто дорівнює куту повороту вхідного вала φ_1 . Але кут A_0OA є проєкцією кута $\varphi_2 - \varphi_{2п}$. Для визначення дійсної величини кута φ_2 необхідно траєкторію « γ » повернути навколо A_0O до сполучення із траєкторією « β », яка перебуває в площині кресленика. У результаті точка A займе положення A' і кут A_0OA' буде спостерігатись у натуральну величину, він і є кутом повороту вихідного вала φ_2 .

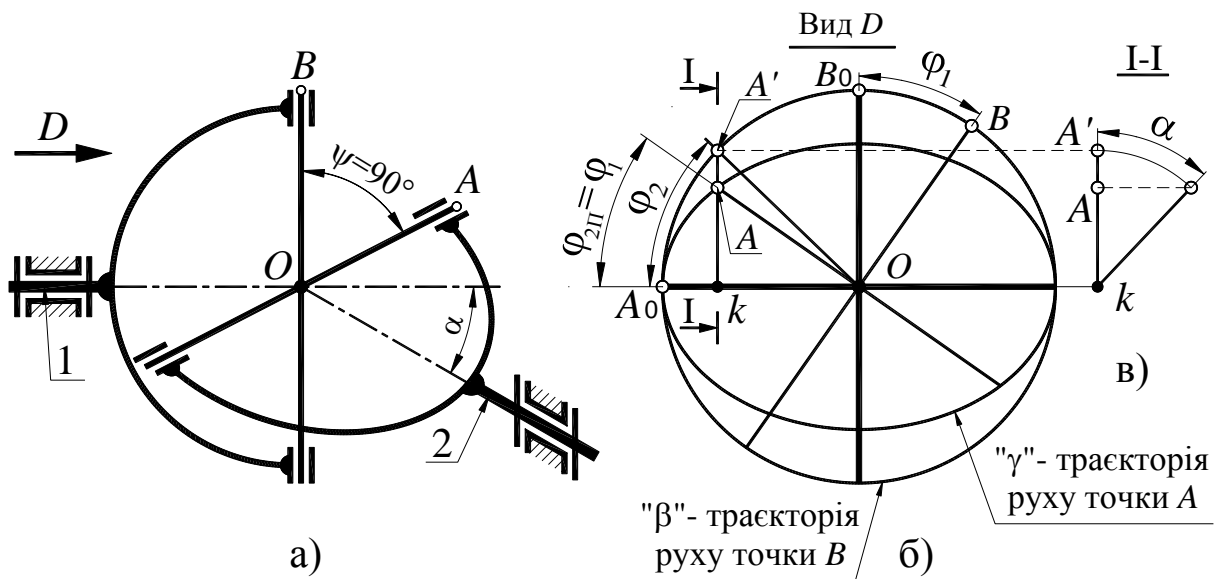


Рис. 2.30. Кінематична схема універсального шарніра

З рис. 2.30, б) маємо, що

$$\begin{aligned} Ak &= Ok \cdot \operatorname{tg} \varphi_1; \\ A'k &= Ok \cdot \operatorname{tg} \varphi_2. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Для встановлення зв'язку між кутами φ_1 і φ_2 розглянемо перетин $I-I$ траєкторій « β » і « γ » (рис. 2.30, в).

З рис. 2.30, в) маємо, що

$$Ak = A'k \cdot \cos \alpha. \quad (2.115)$$

Після підстановки (2.114) в (2.115) одержуємо наступну залежність між кутами повороту валів:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \cos \alpha. \quad (2.116)$$

На рис. 2.31 показаний графік залежності φ_2 від φ_1 побудований за формулою (2.116).

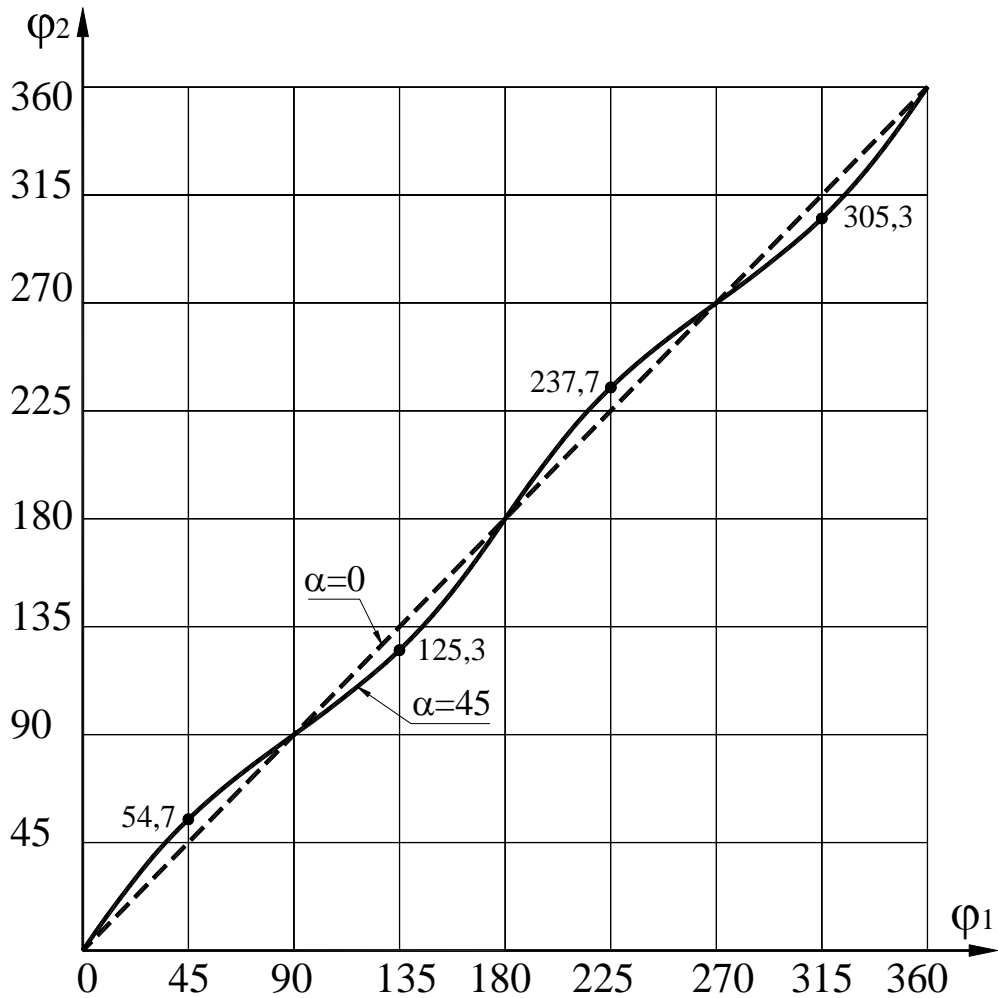


Рис. 2.31. Графік зміни кута повороту кута φ_2 від кута φ_1

На рис. 2.31 пунктирною лінією показана залежність $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ при $\alpha = 0^\circ$. У цьому випадку в будь-який момент часу $\varphi_1 = \varphi_2$. Суцільною лінією показана та ж залежність між кутами φ_1 і φ_2 при $\alpha = 45^\circ$. Позначені моменти максимальної різниці між цими кутами.

Для визначення зв'язку між кутовими швидкостями вхідного й вихідного валів продиференціюємо вираз (2.116) за t , отримаємо

$$\frac{\omega_1}{\cos^2 \varphi_1} = \frac{\cos \alpha \cdot \omega_2}{\cos^2 \varphi_2},$$

тоді

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos^2 \varphi_2}{\cos^2 \varphi_1 \cdot \cos \alpha}. \quad (2.117)$$

Оскільки $\omega_1 = \text{const}$, то у виразі (2.117) ми визначили i_{21} , а не i_{12} , так як для аналізу зручніше мати саме i_{21} . У цьому виразі координата φ_2 не незалежна. Виразимо φ_2 через φ_1 . Для цього вираз (2.116) представимо у вигляді

$$\frac{\sin^2 \varphi_1}{\cos^2 \varphi_1} = \frac{\cos^2 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2}. \quad (2.118)$$

Розв'яжемо рівність (2.118) відносно $\cos^2 \varphi_2$

$$\cos^2 \varphi_2 = \frac{\cos^2 \varphi_1 \cdot \cos^2 \alpha}{(\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 \cdot \cos^2 \alpha)}. \quad (2.119)$$

Після підстановки (2.119) в (2.117) одержимо

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 \cdot \cos^2 \alpha}. \quad (2.120)$$

Можна трохи спростити вираз (2.120), представивши знаменник у наступному вигляді: $\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 \cdot (1 - \sin^2 \alpha)$. Тоді (2.120) прийме вигляд

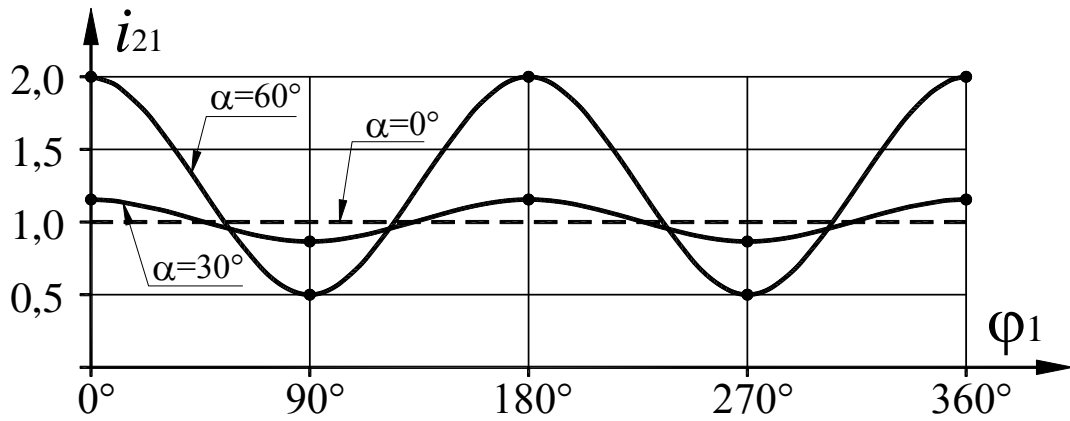
$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \alpha}{1 - \cos^2 \varphi_1 \cdot \sin^2 \alpha}. \quad (2.121)$$

Виконаємо розрахунки значень i_{21} для $\alpha = 30^\circ$ і $\alpha = 60^\circ$. Зрозуміло, що при $\alpha = 0^\circ$ $i_{21} = 1$. Результати розрахунків наведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

φ_1	Передатне відношення i_{21}		
	Формула	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
0°	$1/\cos \alpha$	1,15	2,0
90°	$\cos \alpha$	0,866	0,5
180°	$1/\cos \alpha$	1,15	2,0
270°	$\cos \alpha$	0,866	0,5

За даними табл. 2.1 побудовано графік залежності i_{12} від кута φ_1 (рис. 2.32), який наглядно показує вплив кута α на амплітуду коливань i_{21} .

Рис. 2.32. Графік залежності i_{21} від кута φ_1

2.7. Подвійний шарнір Гука

З наведеного вище видно, що при постійній кутовій швидкості вхідного вала, вихідний вал і маси пов'язані з ним обертаються зі змінною швидкістю. У цьому випадку виникають значні динамічні навантаження, що не припустимо. Для розв'язку цієї проблеми застосовується подвійний шарнір Гука, (див. рис. 2.33).

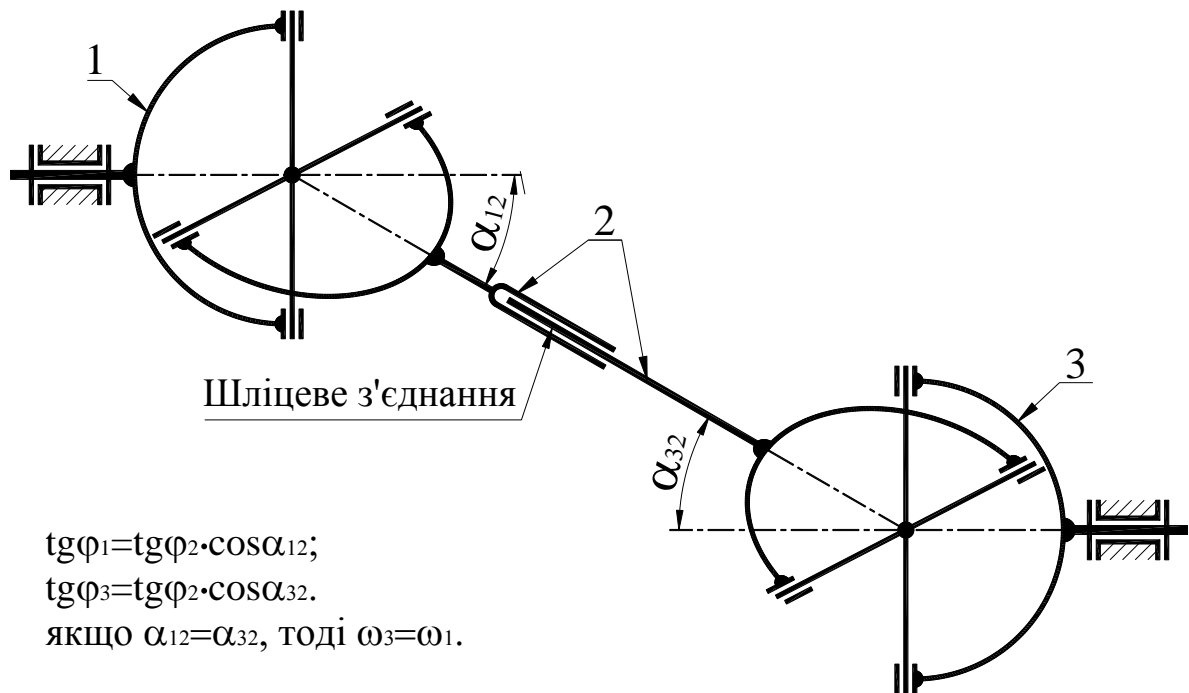


Рис. 2.33. Подвійний шарнір Гука

На рис. 2.33 ліворуч унизу наведені залежності, з яких випливає, що при $\alpha_{12} = \alpha_{32}$ кути повороту валів φ_1 і φ_2 завжди будуть однаковими, а це значить, що однаковими будуть і кутові швидкості вхідного й вихідного валів. Оскільки косинус є парною функцією, то той же ефект можна одержати й

при негативному значенні кута α . У цьому випадку кут між осями валів 1 і 3 буде рівний 2α . На рис. 2.34 показано один з можливих випадків застосування подвійного шарніра.

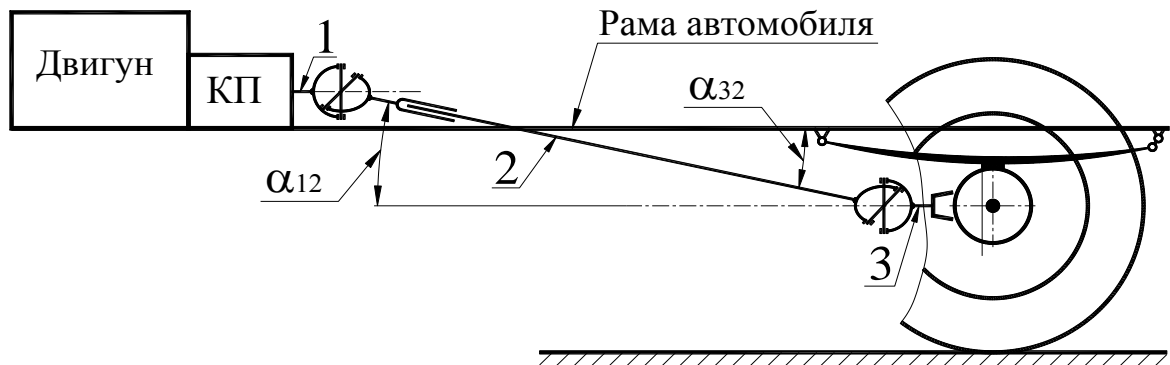


Рис. 2.34. Подвійний шарнір Гука для приводу ведучого моста автомобіля

Відзначимо, що при залежній підвісці коліс, як наведено на рис. 2.35, вісь головної передачі (вісь вала 3) рухається практично поступально, тому зберігається рівність кутів $\alpha_{12} = \alpha_{32}$

Альтернативою подвійного шарніра Гука може бути шарнір рівних кутових швидкостей (ШРКШ), який використовується для приводу керованих коліс, а також коліс з незалежною підвіскою автомобіля. Перевагою подвійного шарніра Гука перед ШРКШ є висока надійність, простота і дешевизна.

2.8. Питання для самопідготовки за розділом

1. Які задачі включає кінематичний аналіз механізмів?
2. Які існують методи кінематичного аналізу механізмів? Які вони мають переваги і недоліки?
3. Що називається аналогом швидкості й аналогом прискорення? Як аналоги зв'язані зі швидкістю і прискоренням?
4. Який геометричний зміст похідної і інтеграла? Як це використовується при графічному диференціюванні й інтегруванні?
5. Чому точність при графічному інтегруванні вища, ніж при графічному диференціюванні?
6. Опишіть кінематичний аналіз механізму методом кінематичних діаграм (на прикладі).
7. Визначте закон руху повзуна центрального (аксіального) кривошипно-повзунного механізму аналітичним методом.
8. Що собою являють плани швидкостей і прискорень механізму і яка їх точність?

9. Як вибираються масштаби планів швидкостей і прискорень і як вони використовуються при визначенні швидкостей і прискорень точок ланок механізмів?

10. Опишіть правила оформлення планів швидкостей і прискорень.

11. Як визначаються величини і напрямки лінійних швидкостей точок ланок механізмів в абсолютному і відносному рухах?

12. Як визначити величини і напрямки кутових швидкостей ланок у складному плоскопаралельному русі?

13. Як визначаються величини і напрямки абсолютних, відносних і поворотних (нормальних, дотичних, Коріолісових) лінійних прискорень точок ланок механізмів?

14. Як визначаються величини і напрямки кутових прискорень ланок, які здійснюють складний плоскопаралельний рух?

15. Сформулюйте теорему подібності планів швидкостей. Як вона використовується при відшуванні швидкостей точок ланок?

16. Сформулюйте теорему подібності планів прискорень. Як вона використовується при відшуванні прискорень точок ланок?

17. У чому полягають особливості оформлення і розв'язання векторних рівнянь руху при побудові планів швидкостей і прискорень?

18. Як визначається величина і напрямок прискорення Коріоліса.

19. В якій послідовності здійснюється побудова планів швидкостей і прискорень?

20. Наведіть схему просторового універсального сферичного шарнірного механізму (шарніра Гука). Яке його призначення? У чому полягає недолік одинарного шарніра Гука?

21. Визначте передатну функцію шарніра Гука і проаналізуйте її.

22. Викресліть кінематичну схему здвоєного шарніра Гука. Якими властивостями вона володіє? Як уникнути нерівномірності обертання вихідного вала?

Розділ 3. ПЕРЕДАЧІ

3.1. Вступ до розділу

Механізми передач – це найпоширеніший і мабуть найважливіший вид механізмів. Важко знайти таку машину, в якій немає такого механізму. Вони застосовуються у верстатах, у вантажопідйомних машинах, автомобілях, різноманітних технологічних машинах і т. п. Привод робочої машин зазвичай здійснюється від асинхронного електродвигуна, синхронна частота вала якого $n_c = (60 \cdot f) / p$. Оскільки число пар полюсів $p = 1 \div 4$, то відповідно синхронна частота буде $n_c = 3000 \div 750$ об/хв (номінальна частота n_n на 2÷3% менша). Частота головного вала робочої машини зазвичай значно відрізняється. Механізм передачі забезпечує узгодження вказаних частот за рахунок відповідного передатного відношення – відношення частот вала двигуна і головного вала машини (рис. 3.1).

В механізмах передач зусилля передаються або зачепленням (зубчасті механізми), або за рахунок сил тертя (фрикційні варіатори, пасові передачі). Головним чином застосовуються зубчасті передачі. Основні переваги зубчастих механізмів, що визначили їхнє широке застосування наступні:

- постійне передатне відношення;
- велика потужність на одиницю маси;
- компактність;
- довговічність;
- високий ККД.

Недоліками зубчастих передач є складність виготовлення й висока вартість.

Зубчасті механізми призначені для передачі обертового руху й перетворення його параметрів. Найважливішою характеристикою зубчастої передачі є передатне відношення – відношення кутових швидкостей вхідного і вихідного валів.

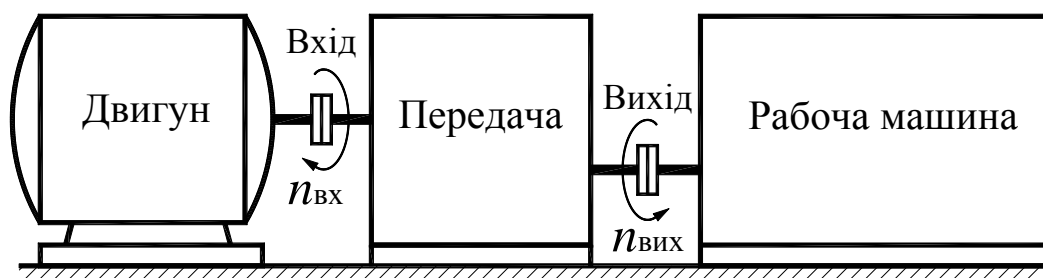


Рис. 3.1. Схема приводу робочої машини

Зубчасті колеса, зубчасті передачі й зубчасті механізми надзвичайно різноманітні, тому доцільно ознайомитися з їхньою найпростішою класифікацією.

Зубчасті передачі бувають:

- а) з постійним і змінним передатним відношенням (некрутлі колеса),
- б) плоскі й просторові,
- в) з паралельними і перехресними осями валів, та з осями, що перетинаються.

За цією ознакою розрізняють циліндричні, конічні, гіперболоїдні (гіпоїдна і гвинтова) і черв'ячні передачі.

3.2. Класифікація зубчастих передач за розташуванням осей валів

1) Передачі з паралельними осями валів

Це найбільш поширені передачі. Вони від інших відрізняються відносно підвищеною спроможністю до сприйняття навантажень, дещо простіші у виготовленні і експлуатації. В цих передачах застосовуються циліндричні колеса (рис. 3.2).

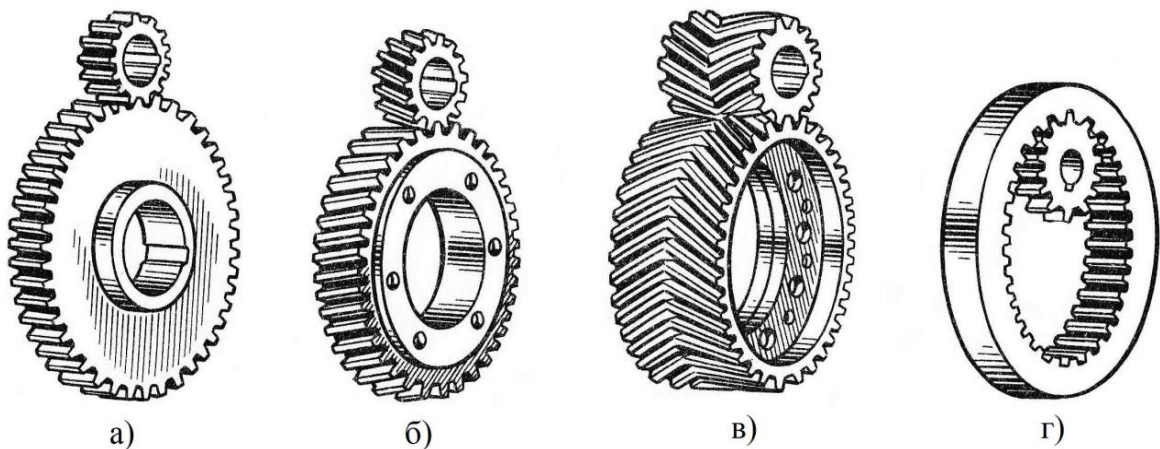


Рис. 3.2. Передачі з циліндричними колесами

На рис. 3.2 наведені наступні передачі:

- а) передача з прямозубими колесами;
- б) передача з косозубими колесами;
- в) шевронна передача;
- г) внутрішнє зачеплення з прямозубими колесами.

Шевронні і косозубі передачі у порівнянні з прямозубими передачами відрізняються підвищеною спроможністю до сприйняття навантажень і потужністю, меншим шумом. Проте в зачепленні косозубих передач виникають осьові сили, що вимагає застосування відповідних опор валів (рис. 3.3). Шев-

ронна передача не потребує таких опор, достатньо забезпечити осьову фіксацію лише одного з коліс. Для прямозубих передач осьова фіксація необхідна для обох коліс.

Опора, що сприймає осьову і радіальну силу

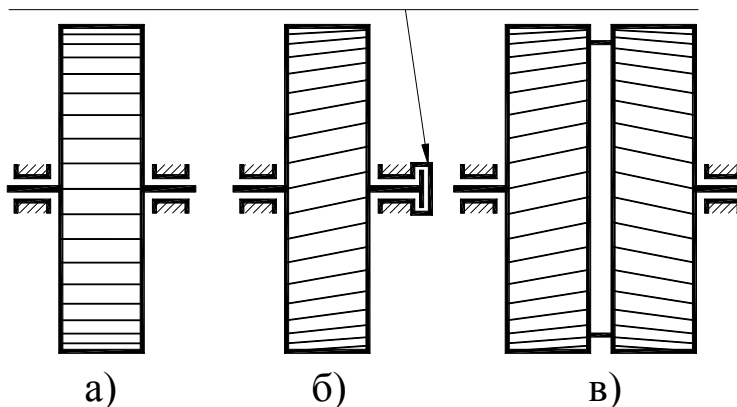
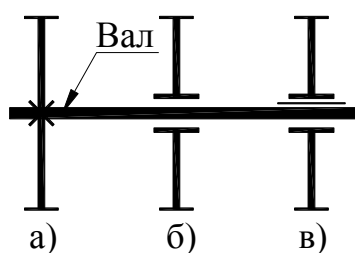


Рис. 3.3. Опори циліндричних коліс

Варіанти установки зубчастих коліс на валах показано на рис. 3.4.



Варіанти установки коліс на валах:

- а) колесо жорстко з'єднано з валом;
- б) колесо вільно встановлено на валу;
- в) колесо встановлено на валу на шліцах.

Рис. 3.4. Схематичне зображення установки коліс на валах

Зазвичай колеса на валах встановлюють жорстко, а інші варіанти установки застосовуються досить рідко (паразитні колеса і деякі колеса в коробках передач).

2) Передачі з осями валів, що перетинаються

Конічні колеса застосовуються для передач із осями валів, що перетинаються. Кут перетинання осей валів може бути будь-яким, але зазвичай цей кут становить 90° .

Конічні колеса складніші у виготовленні, монтажі й експлуатації. За інших рівних умов у порівнянні із циліндричними колесами мають меншу здатність до сприйняття навантажень. На рис. 3.5 і 3.6 показані конічні зубчасті колеса:

- а) прямозубе колесо;
- б) косозубе колесо;
- в) колесо із криволінійною формою зубців (частіше кругова).

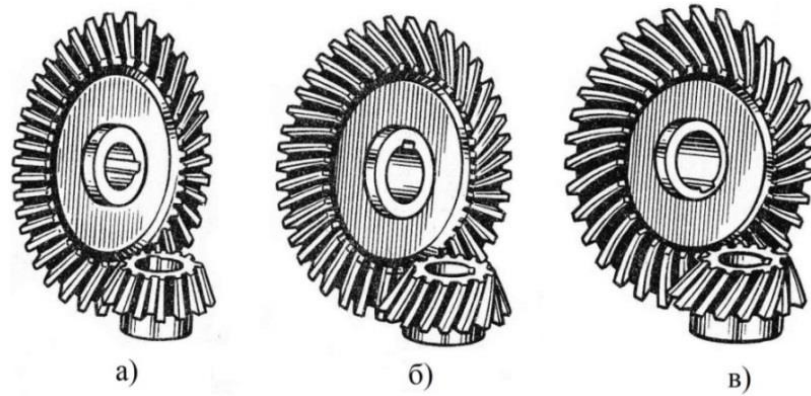


Рис. 3.5. Конічні колеса

Косозубі конічні колеса і колеса з круговою формою зубців додатково характеризуються кутом нахилу зубців β (рис. 3.6). Ці колеса мають переваги у порівнянні з прямозубими колесами (більша здатність до сприйняття навантажень і менший шум).

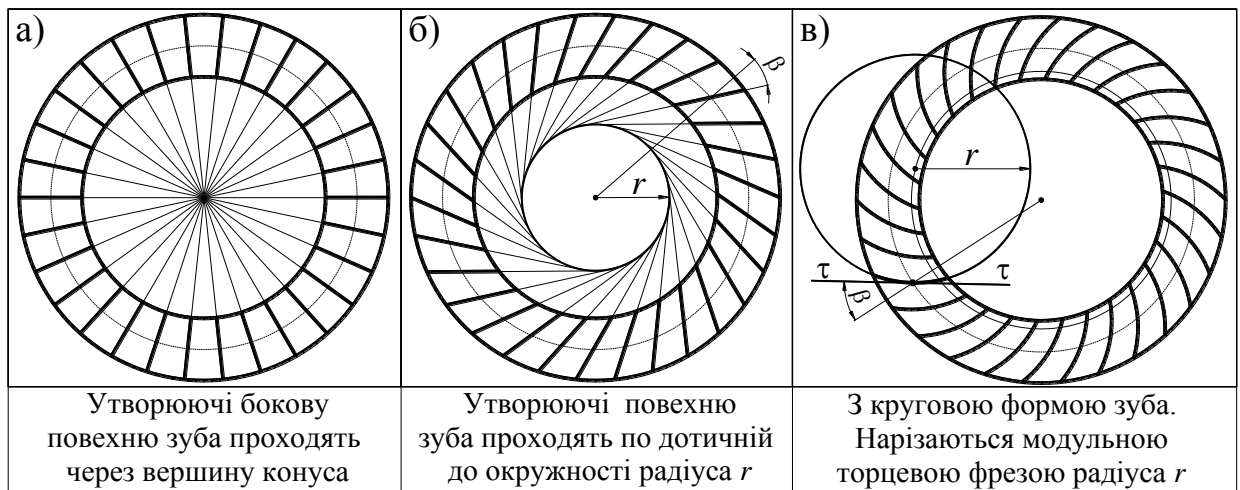


Рис. 3.6. Кути нахилу зубців конічних коліс

3) Передачі з осями валів, що перехрещуються

У цьому випадку застосовуються гіперболоїдні колеса. У гіперболоїдних передачах ланки виконуються у формі гіперболоїда обертання (рис. 3.7). Гіперболоїд – це лінійчата поверхня, утворена при обертанні довільно розташованої в просторі прямої лінії відносно деякої осі. Так при обертанні лінії $\tau\tau$ навколо осі uu утворюється гіперболоїд 1, а при обертання навколо осі xx – гіперболоїд 2 (див. рис. 3.7) Два сполучені гіперболоїди перекочуються один по другому без ковзання й торкаються один одного по лінії $\tau\tau$, яка є миттєвою віссю в відносному обертанні гіперболоїдів. Якщо їх оснастити зубцями, то утворюється теоретично точна гіперболоїдна передача. На практиці використовуються наближені гіперболоїдні передачі, утворені із циліндричних і конічних коліс. В таких передачах застосовують наближені варіанти гіпербо-

лоїдних коліс – це гіпоїдна передача (наближений варіант периферійної частини гіперболоїдів) і гвинтова передача (наближений варіант горловин гіперболоїдів). Ці варіанти показані на рис. 3.7. В гіпоїдній і гвинтовій передачах, на відміну від теоретично точної гіперболоїдної передачі контакт зубців точковий. Окрім гіперболоїдних коліс до цієї групи передач відносяться і черв'ячні передачі.

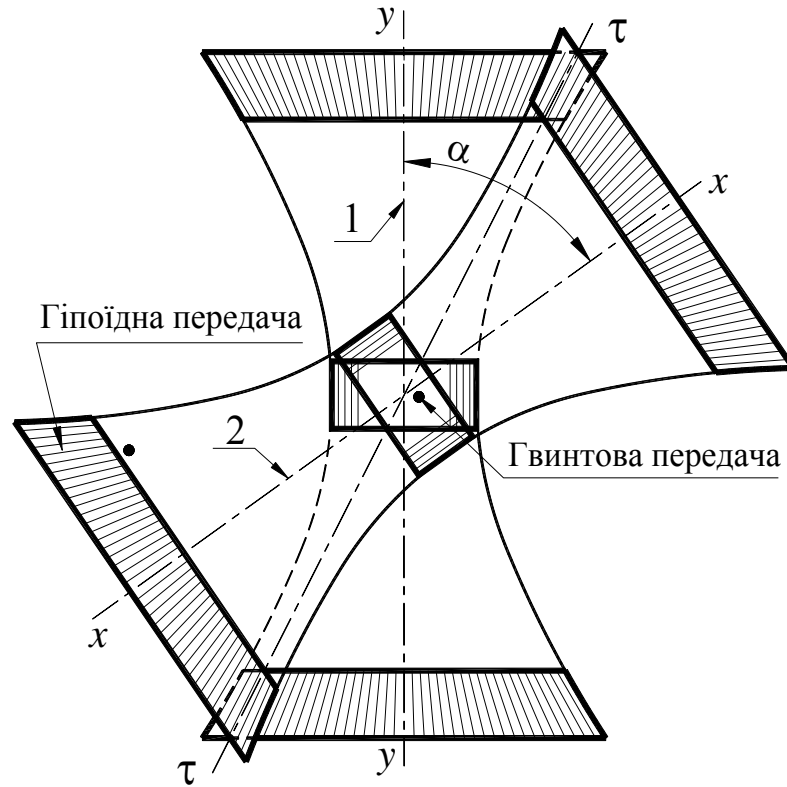


Рис. 3.7. Схема гіперболоїдної передачі

Гвинтова передача (рис. 3.8, а) застосовується досить рідко, в основному для передачі відносно малих потужностей. Характеризується великою швидкістю ковзання вздовж зубця (окрім профільного ковзання). Кут перехрещування осей валів зазвичай рівний 90° , але може бути і інший.

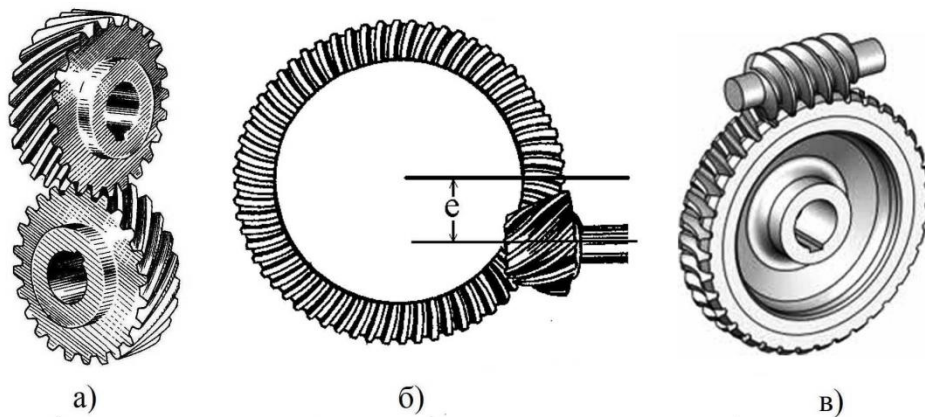


Рис. 3.8. Передачі з осями валів, що перехрещуються

Гіпоїдна передача (рис. 3.8, б) отримала досить широке розповсюдження як альтернатива конічній. Така передача особливо широко застосовується в якості головної передачі в автомобілях.

Проміжне положення за розповсюдженням займає черв'ячна передача (рис. 3.8, в). Та обставина, що ця передача є самогальмівною (у випадку, коли вхідною ланкою є колесо), виявилась важливою перевагою при її застосуванні в деяких виробках.

Передачі з осями валів, що перехрещуються, відзначаються високою плавністю роботи і малим шумом. Вони, як правило, зважаючи на велику швидкість ковзання, потребують спеціального мастила.

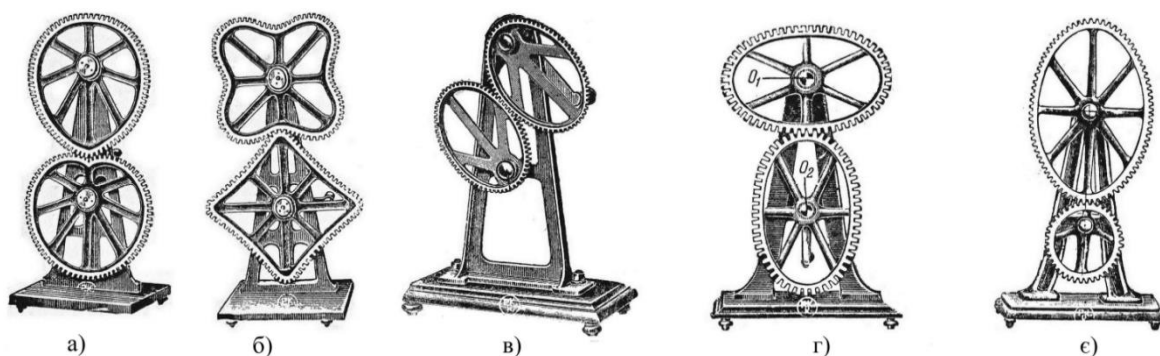


Рис. 3.9. Приклади передач з не круглими колесами

На рис. 3.9 наведені приклади передач з не круглими колесами. На відміну від круглих коліс, де передатне відношення постійне і кількість зубців ведучого і веденого коліс може бути довільною, для не круглих коліс співвідношення числа зубців не може бути довільним – це обов'язково ціле число. Зазвичай це співвідношення дорівнює 1 (як на рис. 3.9, окрім 3.9, є), а передатне відношення $i_{12} \neq \text{const}$.

Передачі з не круглими колесами можуть використовуватись тільки у якості кінематичних передач.

3.3. Основні параметри механічної передачі

На рис. 3.10 показане схематичне зображення передачі. У загальному випадку це може бути як зубчаста, так і фрикційна передача. На вхідному валу напрямки кутової швидкості й крутного моменту збігаються, а на вихідному валу вони спрямовані в різні сторони.

1) Основний параметр передачі – передатне відношення, ним називається відношення кутової швидкості ведучої (вхідної) ланки до кутової швидкості веденої (вихідної) ланки.

Зазвичай вали передачі нумерують і в загальному випадку

$$i_{12} = \omega_1 / \omega_2. \quad (3.1)$$

Для передач з паралельними осями валів прийнято передатне відношення додатково характеризувати знаком: знак «+», якщо напрямки ω_1 і ω_2 збігаються, знак «-», якщо ω_1 і ω_2 спрямовані протилежно. Передача, у якій модуль передатного відношення $|i_{12}| > 1$ називається редуктором, а якщо $|i_{12}| < 1$ – мультиплікатором. В сучасній техніці значно більш поширеними є редуктори. Відзначимо, що в техніці досить часто і передачу з $|i_{12}| > 1$ і передачу з $|i_{12}| < 1$ називають редуктором, маючи на увазі так званий «підвищувачий редуктор». В ТММ ми будемо дотримуватись стандартних назв. Відзначимо також, що в вітроелектростанціях застосовуються саме мультиплікатори, які підвищують вихідну кутову швидкість в десятки разів.



Рис. 3.10. Схема механічної передачі

2) Потужність

$$\begin{aligned} N_1 &= T_1 \cdot \omega_1; \\ N_2 &= T_2 \cdot \omega_2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

3) Коефіцієнт корисної дії (ККД)

$$\eta = \frac{N_2}{N_1} = \frac{T_2 \cdot \omega_2}{T_1 \cdot \omega_1} = \frac{T_2}{T_1 \cdot i_{12}}. \quad (3.3)$$

4) Крутний момент на вихідному валу

$$T_2 = T_1 \cdot i_{12} \cdot \eta. \quad (3.4)$$

5) Рівновага передачі

Під дією крутних моментів T_2 і T_1 передача не перебуває в стані рівноваги. Рівновага досягається за рахунок реактивного моменту T_R при з'єднанні корпусу передачі зі стійкою

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_R = 0. \quad (3.5)$$

3.4. Передатне відношення

Найпростіша зубчаста передача – це триланковий механізм, що включає у свій склад ведуче колесо 1, ведене 2 і стояк (корпус передачі). Таку пе-

редачу називають одноступеневою. За умови обмеження габаритів передачі передатне відношення триланкової передачі порівняно не велике і для отримання передач з більшим передатним відношенням застосовують багатоступеневі передачі.

При розгляді кінематики різних зубчастих механізмів корисно буде скористатись рядом понять з теорії зубчастого зачеплення.

а) Ділильна окружність (ДО) – це окружність, по якій крок зубчастого колеса p має стандартне значення. Довжина цієї окружності становить $L_{ДО} = \pi \cdot d = p \cdot z$, де d – діаметр ДО, z – число зубців колеса (число кроків).

б) Модуль зубчастого колеса. Бажано, щоб значення важливого параметра колеса $d = (p / \pi) \cdot z$ виражалось прийнятним числом. З цією метою був стандартизований не крок p , а відношення $m = p / \pi$, яке отримало назву модуля зубчастого колеса (має розмірність міліметри). Тоді $d = m \cdot z$.

в) Початкова окружність (ПО). Поняття ПО не може застосовуватись для окремо взятого колеса, воно справедливе лише для пари коліс, які знаходяться у зачепленні. Початкові окружності – це окружності пов'язані з колесами, вони торкаються одна одної і перекочуються без ковзання. Для так званих нульових передач ДО і ПО збігаються. При розгляді просторових передач будуть також застосовуватись терміни «ділильний циліндр», «ділильний конус».

а). Передатне відношення пари зубчастих коліс

На рис. 3.11 показані пари коліс зовнішнього (рис. 3.11, а) і внутрішнього (рис. 3.11, б) зачеплення. Все, що буде викладене нижче, в рівній мірі відноситься як до зовнішнього, так і до внутрішнього зачеплення. На рисунку початкові (ПО) і ділильні окружності (ДО) обох коліс збігаються, тобто $ПО_1 = ДО_1$ і $ПО_2 = ДО_2$. Радіуси відповідно r_1 і r_2 .

Точка А – це точка контакту ділильних окружностей – МЦШ у відносному русі коліс, або полюс зачеплення. Швидкість точки А для $ДО_1$ і $ДО_2$ одна і та ж, тобто $V_{A_1} = V_{A_2}$, відповідно

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2. \quad (3.6)$$

З виразу (3.6), враховуючи, що $r_1 = 0,5 \cdot m \cdot z_1$ і $r_2 = 0,5 \cdot m \cdot z_2$, передатне відношення пари коліс буде

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (3.7)$$

Вище було відзначено, що для передач з паралельними осями валів прийнято передатне відношення додатково характеризувати знаком: знак «+» ставиться, якщо напрямки ω_1 і ω_2 збігаються, знак «-», якщо ω_1 і ω_2 спрямовані протилежно.

Наприклад, для пари коліс зовнішнього зачеплення, що зображені на рис. 3.11, $i_{12} < 0$ (ω_1 і ω_2 мають протилежні напрямки), а для пари внутрішнього зачеплення $i_{12} > 0$ (напрямки ω_1 і ω_2 збігаються).

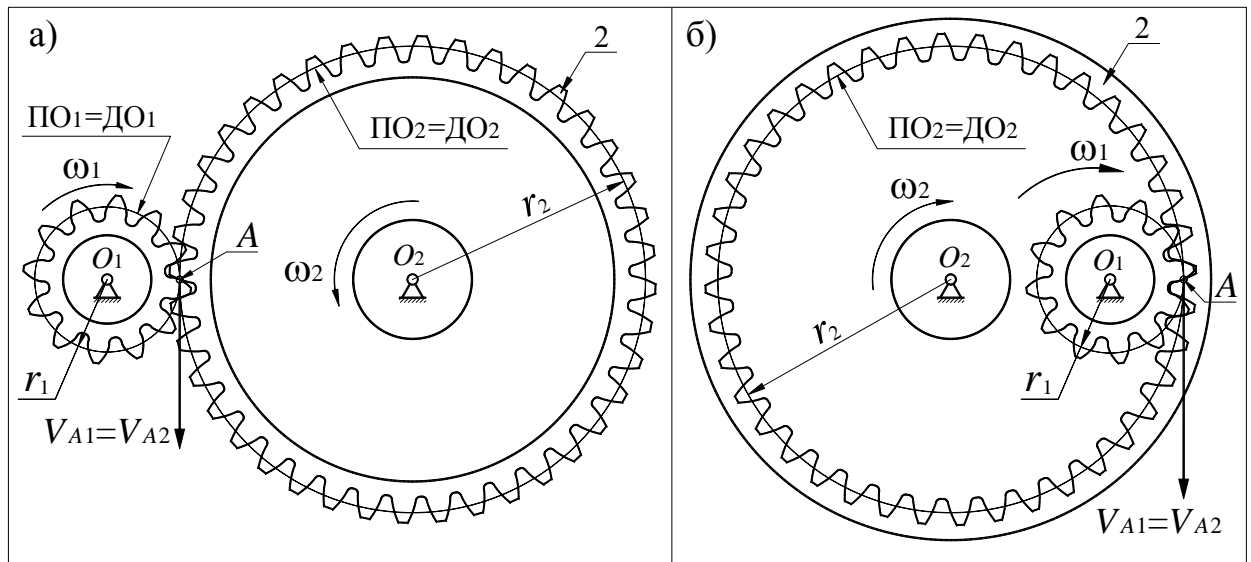


Рис. 3.11. Пари коліс зовнішнього і внутрішнього зачеплення

За умови обмеження габаритів передатне відношення пари коліс зовнішнього зачеплення зазвичай не перевищує 8, а пари внутрішнього зачеплення – не більше 9. Ця рекомендація відноситься до редукторів загального призначення. Можна навести багато прикладів, коли сама конструкція виробу така, що для її нормальної роботи необхідно застосовувати передачу з великим передатним відношенням (механізми повороту крана, екскаватора, гондоли вітроелектростанції і т. д.). В цих виробках розміри веденого колеса передачі визначають за умови статичної стійкості проти перекидання.

б). Передатне відношення конічної передачі

На рис. 3.12, а) зображена передача з пари конічних коліс і їх схематичне зображення (рис. 3.12, б) . Кут перетинання осей валів $\delta = \delta_1 + \delta_2$.

Загальна утворююча OA є миттєвою віссю у відносному русі ділильних конусів 1 і 2. Швидкість точки A буде

$$V_A = \omega_1 \cdot AC = \omega_2 \cdot AB. \quad (3.8)$$

З трикутників $\triangle AOB$ і $\triangle AOC$ маємо, що $AB = OA \cdot \sin \delta_1$, $AC = OA \cdot \sin \delta_2$. Після підстановки значень AB і AC в (3.8) отримаємо $\omega_1 \cdot OA \cdot \sin \delta_1 = \omega_2 \cdot OA \cdot \sin \delta_2$, звідки передатне відношення конічної передачі

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}. \quad (3.9)$$

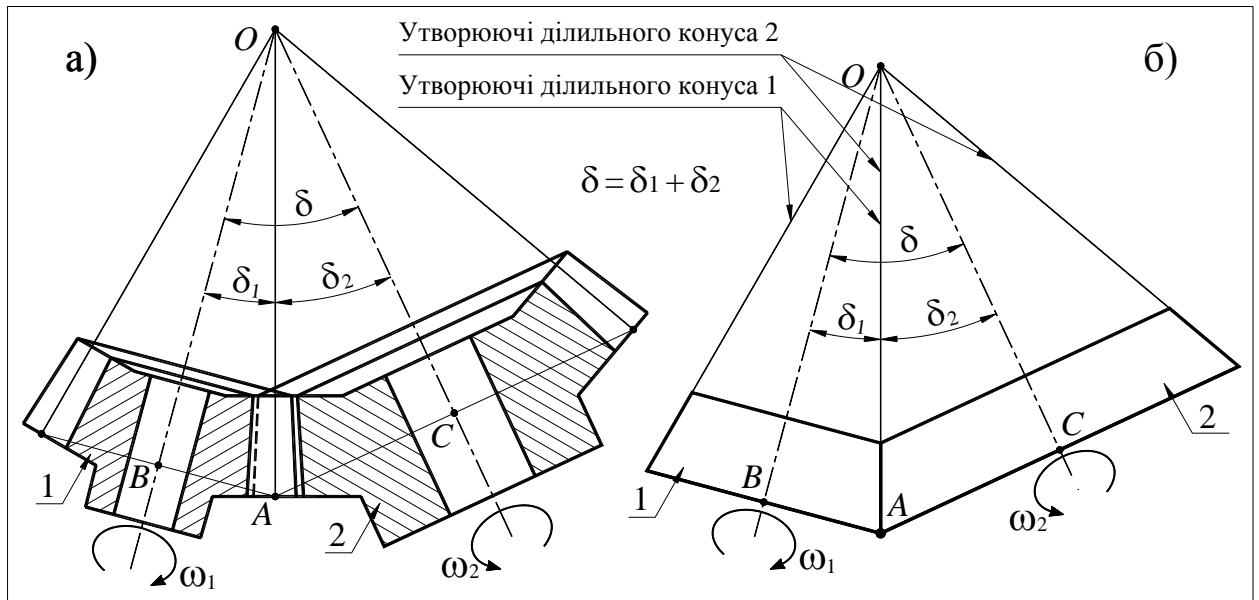


Рис. 3.12. До визначення передатного відношення пари конічних коліс

При $\delta = 90^\circ$, що майже завжди має місце, $\delta_1 = 90^\circ - \delta_2$. Тоді передатне відношення буде

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin(90^\circ - \delta_2)} = \frac{\sin \delta_2}{\cos \delta_2} = \tan \delta_2. \quad (3.10)$$

в). Передатне відношення черв'ячної передачі

Черв'ячна передача складається з вхідної ланки – черв'яка і вихідної – черв'ячного колеса (рис. 3.13).

Переважно застосовуються передачі з циліндричним черв'яком. За формою профіля черв'яки бувають трьох типів: архімедові, конволютні і евольвентні. Архімедів черв'як має прямобічний (трапецеїдальний) профіль в осьовому перерізі, а конволютний – в нормальному перерізі до осі симетрії профіля.

Діаметр черв'яка $d_1 = m \cdot q$, де q – коефіцієнт діаметра черв'яка.

Діаметр черв'ячного колеса $d_2 = m \cdot z_2$, де z_2 – число зубців колеса.

Крок черв'ячної передачі $p = m \cdot \pi$.

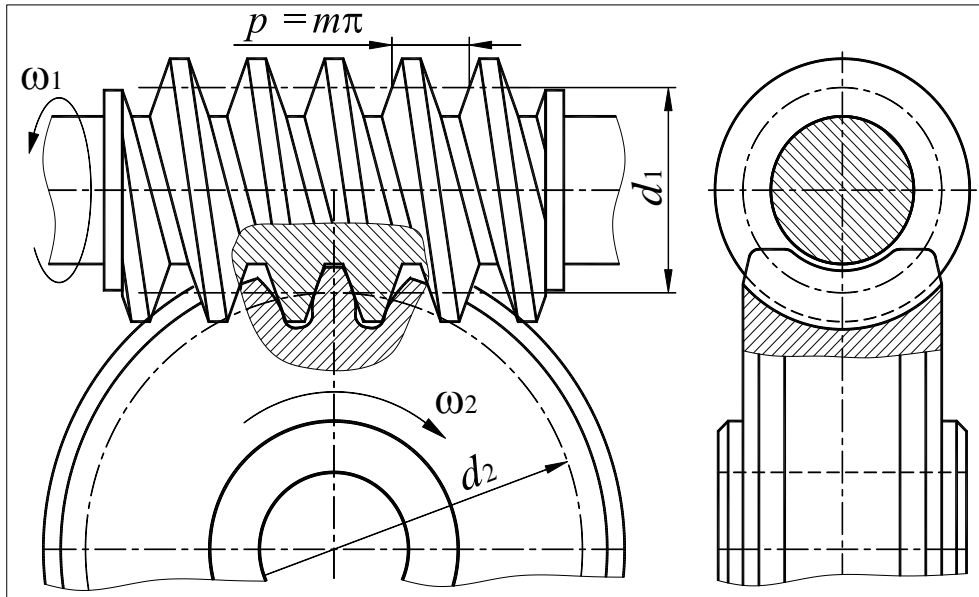


Рис. 3.13. Схема черв'ячної передачі

Число витків z_1 (заходів) черв'яка залежить від передатного відношення i і може бути рівним 1, 2 або 4. Передатне відношення черв'ячної передачі

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (3.11)$$

Зазвичай передатне відношення знаходяться в діапазоні $i_{12} = 8 \div 80$.

Примітка: Передатне відношення зубчастих передач з круглими колесами $i = const$, тобто виражається числом. Враховуючи це, окрім поняття передатне відношення часто використовується поняття передатне число u . На відміну від i завжди передатне число $u \geq 1$ і не характеризується знаком. Поняття передатне відношення більш загальне ніж передатне число.

г). Багатоступінчасті передачі

Для одержання великих передатних відношень застосовують багатоступінчасті передачі. На рисунку 3.14 наведена кінематична схема триступеневої зубчастої передачі. Відзначимо, що колеса 2 і 2' жорстко встановлені на валу O_2 , аналогічно колеса 3 і 3' жорстко встановлені на валу O_3 . Колеса на цих валах, природно, мають однакові кутові швидкості.

На рис. 3.14 з позначками 1, 2 і 3 – ведучі колеса, а 1', 2', 3' – ведені (на рисунку вони заштриховані).

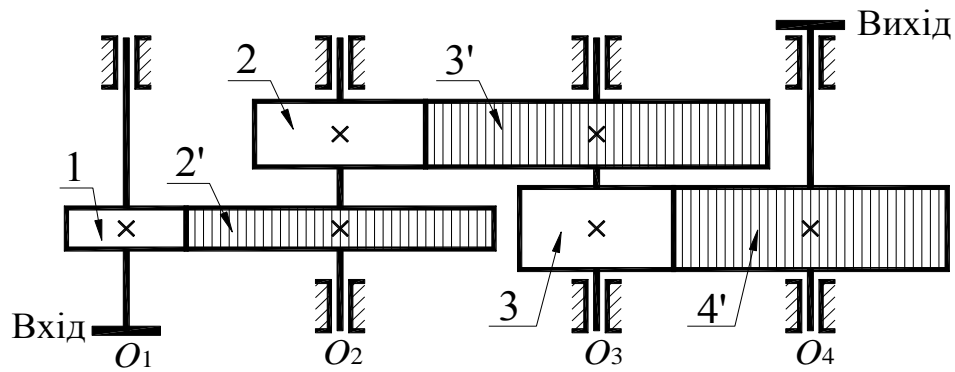


Рис. 3.14. Триступенева передача з циліндричними колесами

Запишемо передатні відношення для кожного ступеня з урахуванням знаку, прийнятого для таких передач.

$$\begin{aligned} i_{12} &= \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_{2'}}{z_1}; \\ i_{23} &= \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{z_{3'}}{z_2}; \\ i_{34} &= \frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{z_{4'}}{z_3}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Запишемо добуток передатних відношень (3.12)

$$i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_4}, \quad \text{тобто} \quad i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4}. \quad (3.13)$$

Висновок: передатне відношення будь-якої багатоступінчастої передачі дорівнює добутку передатних відношень окремих її ступенів.

Виразимо передатне відношення через числа зубців коліс

$$i_{14} = (-1)^3 \cdot \left(\frac{z_{2'}}{z_1} \right) \cdot \left(\frac{z_{3'}}{z_2} \right) \cdot \left(\frac{z_{4'}}{z_3} \right) = (-1)^3 \cdot \frac{z_{2'} \cdot z_{3'} \cdot z_{4'}}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}. \quad (3.14)$$

Висновок: передатне відношення багатоступінчастої зубчастої передачі дорівнює відношенню добутку чисел зубців ведених коліс до добутку чисел зубців ведучих коліс.

Знак передатного відношення таких передач визначається за числом зовнішніх зачеплень: парне число зовнішніх зачеплень – знак плюс і навпаки.

д). Передачі із проміжними (паразитними) колесами

Зубчасті колеса, які одночасно є веденими й ведучими, називаються проміжними або паразитними колесами. На рис. 3.15 показана така передача.

Тут колесо 1 – ведуче, колесо 4 – ведене (повністю заштриховане), а колеса 2 і 3 – паразитні (на половину заштриховані). Так колесо 2 є веденим

відносно колеса 1, але ведучим стосовно колеса 3. Аналогічно, колесо 3 є веденим відносно колеса 2, але ведучим стосовно колеса 4.

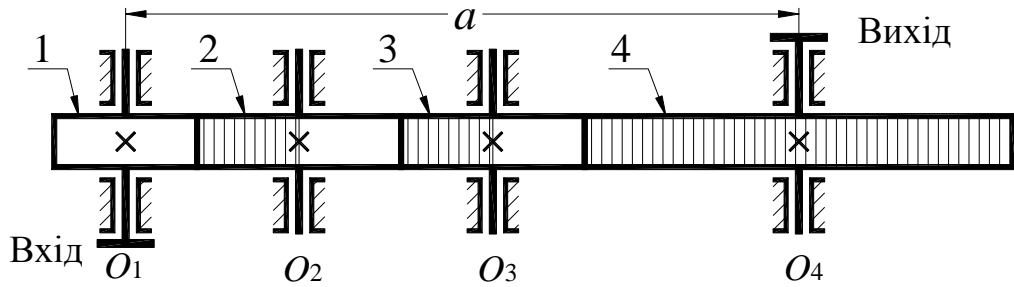


Рис. 3.15. Передача з паразитними колесами

Запишемо передатні відношення для всіх пар коліс (1-2, 2-3 і 3-4).

$$\begin{aligned} i_{12} &= \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}; \\ i_{23} &= \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{z_3}{z_2}; \\ i_{34} &= \frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_3}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Відомо, що передатне відношення багатоступінчастої передачі дорівнює добутку передатних відношень окремих її ступенів, тоді:

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_4}, \quad \text{тобто} \quad i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4}. \quad (3.16)$$

Виразимо загальне передатне відношення через числа зубців

$$i_{14} = (-1)^3 \cdot \left(\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(\frac{z_4}{z_3}\right) = (-1)^3 \cdot \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3} = (-1)^3 \cdot \frac{z_4}{z_1}. \quad (3.17)$$

З (3.17) робимо висновок: *числа зубців паразитних коліс на величину передатного відношення не впливають.*

Паразитні колеса застосовують для інвертування руху, а також при досить великій міжосьовій відстані a . На рис. 3.15 міжосьова відстань дорівнює $a = r_1 + r_4 + 2(r_2 + r_3)$. Без паразитних коліс для пари коліс 1 і 4 при тому ж значенні і знаку i_{14} міжосьова відстань буде дорівнювати $a' = r_1 + r_4$. Для того, щоб отримати передачу з заданими значеннями міжосьової відстані a і передатного відношення i_{14} , необхідно збільшити радіуси коліс r_1 і r_4 в K разів

$$K = \frac{a}{a'} = \frac{r_1 + r_4 + 2 \cdot (r_2 + r_3)}{r_1 + r_4} = 1 + \frac{2 \cdot (r_2 + r_3)}{r_1 + r_4}. \quad (3.18)$$

3.5. Планетарні передачі

Планетарною називається передача, у якої є колеса з рухомими осями. На рис. 3.16 показана планетарна передача, у якої колесо 2 має рухому вісь. Це механізм типу Джемса. Тут 1 і 4 – центральні колеса, 2 – сателіт, h – водило.

Визначимо число ступенів свободи механізму за формулою Чебишева

$$W = 3 \cdot n - 2p_n - p_v = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2,$$

де $n = 4$ – число рухомих ланок (1, 2, 4 і h);

$p_n = 4$ – число нижчих пар (1-стійка, 2- h , h -4 і 4-стійка);

$p_v = 2$ – число вищих пар (1-2, 2-4).

За формулою число ступенів свободи механізму $W=2$. Це означає, що незалежний рух можна задати будь-якій парі ланок. Такий механізм називається планетарний диференціальний механізм.

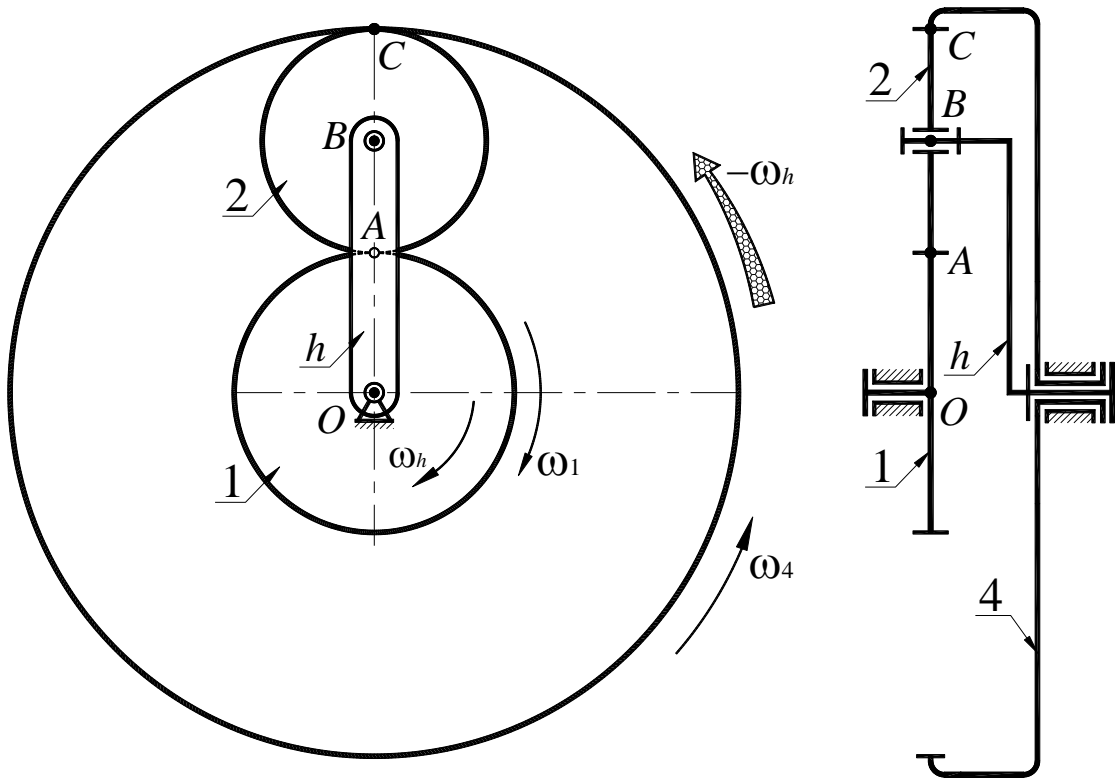


Рис. 3.16. Планетарна передача

Одна з ланок може бути зупинена й у цьому випадку число ступенів механізму $W=1$. Якщо зупинити одне із центральних коліс 1 або 4, то одержимо планетарний механізм. Якщо зупинити водило, тобто $\omega_h = 0$, то вийде не планетарний механізм, а простий механізм із нерухливими осями валів.

а). Аналітична кінематика планетарних механізмів. Формула Вілліса

При $W=2$ можна задати два незалежних рухи, рух інших ланок при цьому буде цілком визначеним, тобто якщо, наприклад, задати ω_1 і ω_4 , то рух водила h , буде цілком певним. Встановимо залежність між кутовими швидкостями валів центральних коліс 1 і 4 та водила h . Оскільки в механізмі є колесо з рухомою віссю (колесо 2), то записати зв'язок між ω_1 , ω_4 і ω_h у вигляді передатного відношення не можливо. Для розв'язання завдання скористаємося методом обернення руху (метод інверсії або метод Вілліса, або метод уявної зупинки водила). Сутність методу полягає в наступному: необхідно всьому механізму повідомити кутову швидкість, рівну швидкості водила, але протилежного напрямку, тобто « $-\omega_h$ » (див рис. 3.16). У результаті відносні кутові швидкості залишаться такими ж, а абсолютні зміняться на величину « $-\omega_h$ ». Кутова швидкість водила в оберненому механізмі стане рівною нулю, тобто він стане не планетарним і зв'язок між кутовими швидкостями можна буде записати у вигляді передатного відношення. Після обернення руху абсолютні кутові швидкості будуть рівні

$$\begin{aligned}\omega'_1 &= \omega_1 - \omega_h; \\ \omega'_4 &= \omega_4 - \omega_h; \\ \omega'_h &= \omega_h - \omega_h = 0.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Запишемо для оберненого механізму передатне відношення від першої ланки до четвертої, враховуючи, що $\omega'_h = 0$. З урахуванням, що в передачі міститься одне зовнішнє і одне внутрішнє зачеплення, та колесо 2 є паразитним, отримаємо

$$i_{14}^{(h)} = \frac{\omega'_1}{\omega'_4} = \frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_4 - \omega_h} = -\frac{z_4}{z_1}.\tag{3.20}$$

Формула (3.20) зветься формулою Вілліса. Як бачимо, якщо в цю формулу підставити значення двох швидкостей, можна знайти значення третьої швидкості.

б). Основні схеми планетарних механізмів і їх характеристика

На рис. 3.17 наведені основні схеми планетарних механізмів.

Нагадаємо, що для визначення знаку передатного відношення передачі з циліндричними колесами необхідно врахувати кількість зовнішніх зачеплень. Так в схемах 1 і 2 по одному, а в схемі 3 два зовнішніх зачеплення. В схемі 4 тільки внутрішні зачеплення. Це означає, що при $\omega_h = 0$ для схем 1 і 2

$i_{14}^{(h)} \leq 0$, а для схем 3 і 4 $i_{14}^{(h)} \geq 0$. Нижче буде показано, що це має принципове значення.

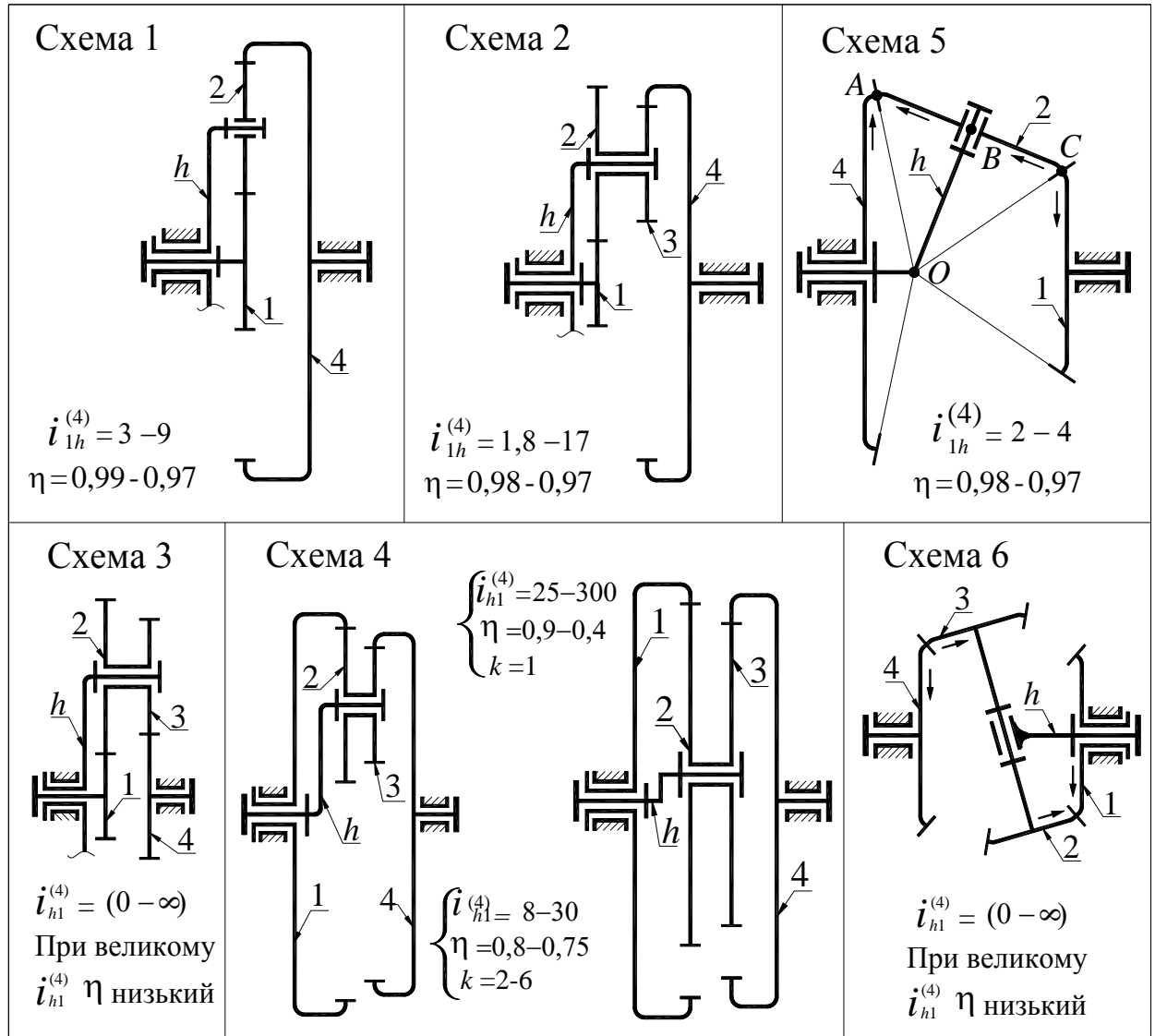


Рис. 3.17. Основні схеми планетарних механізмів

Багатоступеневі планетарні передачі з конічними колесами (не менше ніж два ступеня) також можуть мати паралельні осі вхідного і вихідного валів. В цьому випадку виникає питання визначення знаку передатного відношення. В схемах 5 і 6 по два зачеплення. Відрізняються ці схеми тим, що в схемі 5 колесо 2 (сателіт) є паразитним, а в схемі 6 (колеса 2 і 3) – ні.

Для визначення знаку передатного відношення передач з конічними колесами застосовується метод стрілок. Стрілками вказують напрямки окружних (лінійних) швидкостей точок коліс переднього плану. Стрілки на колесах завжди направлені або в зону зачеплення, або навпаки. Так на схемі 5 на колесах 2 і 4 стрілки направлені в зону зачеплення (точка A), а біля точки C – від зони зачеплення, тобто кутові швидкості коліс 1 і 4 мають протилежні

напрямки як і в схемах 1 і 2. Знак передатного відношення для 5-ої схеми такий же як і для схем 1 і 2, тобто $i_{14}^{(h)} \leq 0$. Схеми 1, 2 та 5 близькі за кінематичними можливостями і ми їх будемо називати механізмами типу Джемса.

В схемі 6 напрямки кутових швидкостей центральних коліс 1 і 4 збігаються як і в схемах 3 і 4, тобто $i_{14}^{(h)} \geq 0$. Схему 3, 4 та 6 будемо називати схемами типу Давида.

Тепер розглянемо кінематичні можливості схем, зображених на рис. 3.17 і варіанти їх застосування.

Схема 1. Механізм типу Джемса (див. рис. 3.16 і рис. 3.17, схема 1). Схема 1 отримала найбільше поширення завдяки простоті й високому ККД. Найчастіше використовується в наступному варіанті: $\omega_4 = 0$, ланка 1 – вхід, водило h – вихід. Передатне відношення $i_{14}^{(h)}$ знайдемо за формулою Вілліса

$$i_{14}^{(h)} = \frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_4 - \omega_h} = \frac{\omega_1 - \omega_h}{0 - \omega_h} = -\frac{\omega_1}{\omega_h} + 1 = -i_{1h}^{(4)} + 1. \quad (3.21)$$

З (3.21) знайдемо необхідне передатне відношення

$$i_{1h}^{(4)} = 1 - i_{14}^{(h)}. \quad (3.22)$$

Примітка: формула (3.22) застосовується для всіх схем планетарних механізмів, наведених на рис. 3.17.

Передатне відношення від першої ланки до четвертої при зупиненому водилі буде $i_{14}^{(h)} = -(z_4 / z_1)$.

Тоді остаточно для схеми 1 передатне відношення буде дорівнювати

$$i_{1h}^{(4)} = 1 + \frac{z_4}{z_1}. \quad (3.23)$$

Відзначимо, що у порівнянні з варіантом, коли зі стояком з'єднано водило ($\omega_h = 0$), модуль передатного відношення $i_{1h}^{(4)}$ на одинцю більше ніж $i_{14}^{(h)}$, і напрямки кутових швидкостей ланок 1 і 4 збігаються.

Діапазон передатних відношень для схеми 1 становить $i_{1h}^{(4)} = 3 \div 9$. Верхнє значення обумовлене габаритами передачі, а нижнє – умовою розмірів сателіта 2 і його розташування. Зі схеми 1 на рис. 3.17 радіус колеса 4 за умови збігу осей коліс 1 і 4 буде дорівнювати $r_4 = r_1 + 2 \cdot r_2$, тоді $r_2 = \frac{r_4 - r_1}{2}$ і при $r_4 = 2 \cdot r_1$ радіус сателіта $r_2 = 0,5 \cdot r_1$. Тобто вже при $i_{1h}^{(4)} = 3$ радіус сателіта в 2 рази менше ніж r_1 . Для виконання умови обмеження мінімального розміру

сателіта необхідно, щоб $z_4 / z_1 \geq 2$. Коефіцієнт корисної дії такої передачі дуже високий $\eta = 0,99 \div 0,97$ (наведений і на рис. 3.17).

Примітка: хоча в схемах 1 і 5 всього по 3 колеса на відміну від решти схем, для зручності на всіх схемах центральні колеса позначено номерами 1 і 4.

Схема 2. Механізм типу Джемса з подвійним сателітом (див. рис. 3.17). Зазвичай використовується в наступному варіанті: $\omega_4 = 0$, ланка 1 – вхід, водило h – вихід. Передатне відношення $i_{14}^{(h)}$ знаходимо, використовуючи формулу (3.22), що має вигляд $i_{1h}^{(4)} = 1 - i_{14}^{(h)}$. Передатне відношення $i_{14}^{(h)}$ для схеми 2 визначаємо за сформульованим раніше правилом, тобто як відношення добутку чисел зубців ведених коліс (2 і 4) до добутку чисел зубців ведучих коліс (1 і 3):

$$i_{14}^{(h)} = -\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}. \quad (3.24)$$

Передатне відношення від колеса 1 до водила при $\omega_4 = 0$ буде рівне

$$i_{1h}^{(4)} = 1 + \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}. \quad (3.25)$$

Для цієї схеми діапазон значень передатних відношень значно ширше у порівнянні зі схемою 1 і становить $i_{1h}^{(4)} = 1,8 \div 17$. Значення ККД для всіх схем наведені на рис. 3.17.

Схема 3. Механізм Давида із двома зовнішніми зачепленнями.

Передатне відношення $i_{14}^{(h)}$ для схеми 3

$$i_{14}^{(h)} = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}. \quad (3.26)$$

Звертаємо увагу на те, що $i_{14}^{(h)} \geq 0$. Зазвичай ця схема використовується в наступному варіанті: $\omega_4 = 0$, водило h – вхід, колесо 1 – вихід. Передатне відношення $i_{h1}^{(4)}$ знайдемо, використовуючи формулу (3.22) вигляду $i_{1h}^{(4)} = 1 - i_{14}^{(h)}$, але потрібно знайти не $i_{1h}^{(4)}$, а $i_{h1}^{(4)}$, тобто обернену величину

$$i_{h1}^{(4)} = \frac{1}{1 - i_{14}^{(h)}}. \quad (3.27)$$

З (3.27) видно, що ця схема має необмежені кінематичні можливості: можна отримати передатне відношення будь-якого знаку й будь-якого зна-

чення. Однак, якщо $i_{14}^{(h)} \rightarrow 1$, то $i_{h1}^{(4)} \rightarrow \infty$, а ККД передачі при цьому наближається до нуля. Після підстановки до (3.27) значення $i_{14}^{(h)}$, одержимо

$$i_{h1}^{(4)} = \frac{1}{1 - i_{14}^{(h)}} = \frac{1}{1 - \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}} = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_3 - z_2 \cdot z_4}. \quad (3.28)$$

Схема 4. Схема Давида із двома внутрішніми зачепленнями. Ця схема використовується в такому ж варіанті, як і схема 3. Усі залежності, наведені для схеми 3, справедливі і для цієї схеми. ККД передачі у порівнянні зі схемою 3 трохи вище, що досягається завдяки внутрішньому зачепленню. Слід відзначити, що найчастіше схема 4 застосовується з одним блоком сателітів (див. рис. 3.17, схема 4 справа). У цьому випадку водило h являє собою ексцентриковий вал.

Всі схеми на рис. 3.17 прийнято позначати $2k-h$. На їх основі можна побудувати схеми з трьома центральними колесами, що мають позначення $3k$. Приклади планетарних механізмів, виконаних за схемою $3k$ показані на рис. 3.18. Відзначимо, що водило в цих механізмах не є основною ланкою. Механізми $3k$ можна отримати зі схем на рис. 3.17 з двовінцевими сателітами, якщо встановити додаткове центральне колесо, яке буде в зачепленні з сателітом.

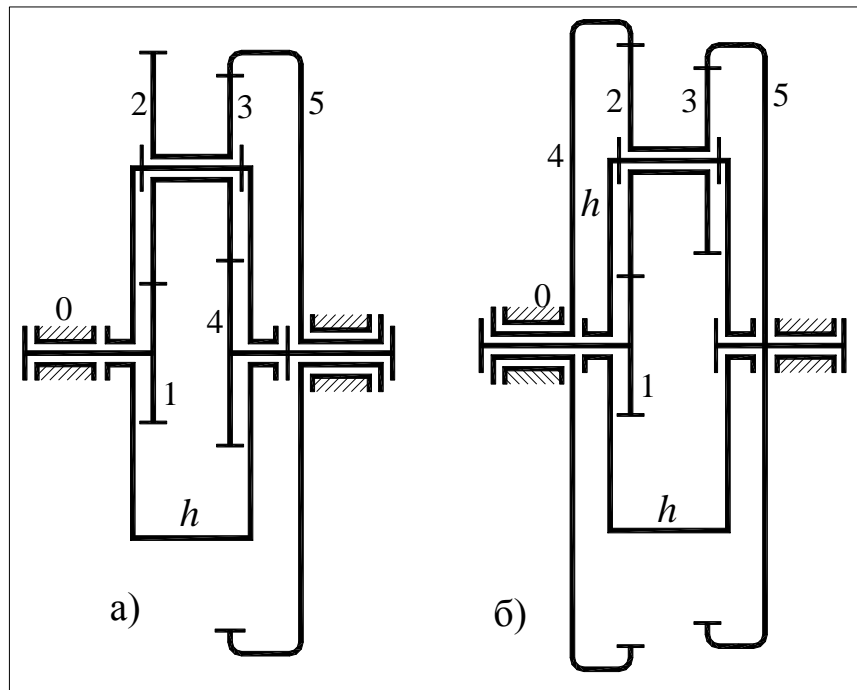


Рис. 3.18. Приклади планетарних механізмів $3k$

Визначимо число ступенів свободи механізму $3k$:

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_{\text{н}} - p_{\text{в}} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 3 = 2,$$

де $n = 5$ – число рухомих ланок (1, 23, 4, 5, h);

$p_n = 5$ – число нижчих кінематичних пар (1-0, 23- h , 4-5, 1- h , 5-0);

$p_v = 3$ – число вищих кінематичних пар (1-2, 4-3, 3-5).

Вищі і нижчі пари вказані з урахуванням позначень на схемі зліва (рис. 3.18, а). На схемі справа позначення дещо відрізняються, але значення всіх величин в формулі для визначення числа ступенів свободи такі ж.

Значення $W=2$ означає, що рух всіх ланок буде певним, якщо задати рух двох ланок з числа трьох (1, 4 і 5).

Для визначення передатного числа механізму треба скористатись двома з трьох формул Вілліса, що визначають передатні відношення між двома центральними колесами при застосуванні метода інверсії. Запишемо ці відношення між ланками 1–5 і 1–4

$$i_{15}^{(h)} = \frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_5 - \omega_h} = -\frac{z_2 \cdot z_5}{z_1 \cdot z_3} = -u_1; \quad (3.29)$$

$$i_{14}^{(h)} = \frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_4 - \omega_h} = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = u_2. \quad (3.30)$$

Необхідно отримати залежність між кутовими швидкостями вигляду $\omega_1 \cdot k_1 + \omega_4 \cdot k_4 + \omega_5 \cdot k_5 = 0$, де k_1 , k_4 і k_5 – коефіцієнти, що залежать від u_1 і u_2 . Можна одне з рівнянь розв'язати відносно ω_h і підставити отримане значення в друге рівняння, або ж з обох рівнянь визначити ω_h і прирівняти знайдені значення. Розв'яжемо задачу другим способом

$$u_1 = \frac{z_2 \cdot z_5}{z_1 \cdot z_3};$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_5 - \omega_h} = -u_1; \quad (3.31)$$

$$\omega_1 - \omega_h = -u_1 \cdot \omega_5 + u_1 \cdot \omega_h;$$

$$\omega_h = \frac{\omega_1 + u_1 \cdot \omega_5}{u_1 + 1}.$$

$$u_2 = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3};$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_4 - \omega_h} = u_2; \quad (3.32)$$

$$\omega_1 - \omega_h = u_2 \cdot \omega_4 - u_2 \cdot \omega_h;$$

$$\omega_h = \frac{\omega_1 - u_2 \cdot \omega_4}{1 - u_2}.$$

З виразів (3.31) і (3.32) маємо

$$\frac{\omega_1 + u_1 \cdot \omega_5}{u_1 + 1} = \frac{\omega_1 - u_2 \cdot \omega_4}{1 - u_2}. \quad (3.33)$$

Після спрощень вираз (3.33) набуде вигляду

$$\omega_1 \cdot (k_1 - k_2) - \omega_4 \cdot (k_1 \cdot k_2 + k_2) - \omega_5 \cdot (k_1 - k_1 \cdot k_2) = 0. \quad (3.34)$$

Формулою (3.34) можна скористатись як при $W = 2$, так і в випадку, коли одне з коліс (1, 4 або 5) зупинене.

Приклад 1. Визначити передатне відношення планетарного механізму $i_{15}^{(4)}$ зображеного на рис. 3.18, а), якщо дано $\omega_4 = 0$; $z_1 = 18$, $z_2 = 30$, $z_3 = z_4 = 24$, $z_5 = 72$.

При $\omega_4 = 0$ з (3.34) знаходимо

$$i_{15}^{(4)} = \frac{\omega_1}{\omega_5} = -\frac{u_1 \cdot (u_2 - 1)}{u_2 + u_1} = -\frac{5 \cdot (1,67 - 1)}{1,67 + 6} = -0,5,$$

$$\text{де } u_1 = \frac{z_2 \cdot z_5}{z_1 \cdot z_3} = \frac{30 \cdot 72}{18 \cdot 24} = 5, \quad u_2 = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = \frac{30 \cdot 24}{18 \cdot 24} = 1,67.$$

Приклад 2. Визначити передатне відношення $i_{h1}^{(4)}$ механізму Давида з двома зовнішніми зачепленнями (рис. 3.17, схема 3), якщо дано $z_2 = 99$, $z_4 = 101$, $z_1 = z_3 = 100$.

Скористаємось формулою (3.28)

$$i_{h1}^{(4)} = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_3 - z_2 \cdot z_4} = \frac{100 \cdot 100}{100 \cdot 100 - 99 \cdot 101} = \frac{10^4}{10^4 - (100 - 1) \cdot (100 + 1)} = 10^4.$$

Цей приклад ми розглянули, щоб наглядно показати кінематичні можливості такої схеми. Однак при великих значеннях передатного відношення ККД передачі може складати долі відсотка, а якщо в якості вхідної ланки прийняти не водило, а центральне колесо, то існує ряд значень $i_{14}^{(h)}$, при яких передача буде самогальмівною.

Приклад 3. Визначити в загальному вигляді передатне відношення i_{1h_2} багатоступінчастої передачі з двома планетарними механізмами Джемса (рис. 3.19). Передача має три ступеня: пара коліс зовнішнього зачеплення, планетарний механізм з циліндричними колесами (схема 1 на рис. 3.17) і планетарний механізм з конічними колесами (схема 5 на рис. 3.17).

Відзначимо, що $i_{12} < 0$, $i_{2'h_1}^{(4)} > 0$ і $i_{5h_2}^{(7)} > 0$. Тобто $i_{1h_2} < 0$. Передатне відношення всієї передачі є добутком передатних відношень окремих її ступенів, тобто $i_{1h_2} = i_{12} \cdot i_{2'h_1}^{(4)} \cdot i_{5h_2}^{(7)}$. Відзначимо також, що $\omega_2 = \omega_2'$ і $\omega_5 = \omega_4$.

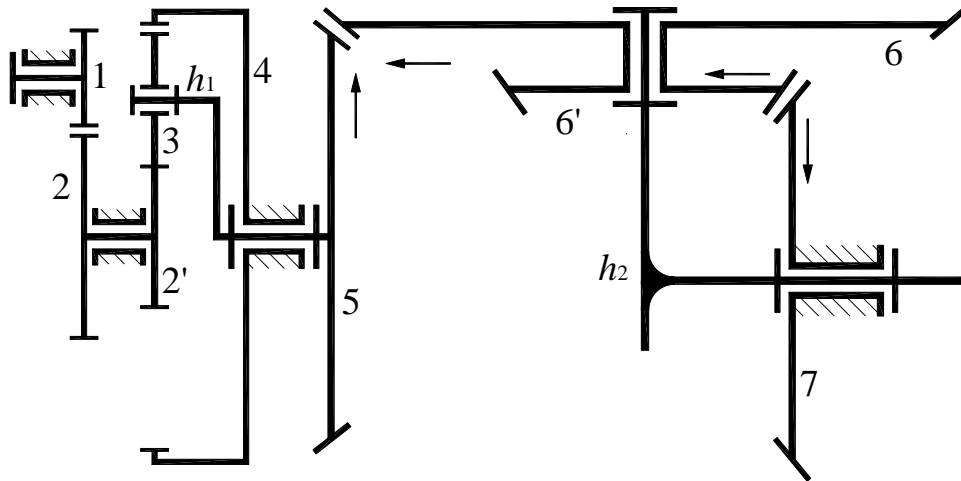


Рис. 3.19. Багатоступінчаста передача з планетарними механізмами Джемса

Визначаємо передатні відношення ступенів. Нагадаємо, що для визначення передатного відношення планетарного механізму з нерухомим центральним колесом треба скористатись формулою (3.22), що має вигляд $i_{1h}^{(4)} = 1 - i_{14}^{(h)}$. З урахуванням позначень коліс на рис. 3.19 можна записати, що $i_{2'h_1}^{(4)} = 1 - i_{2'4}^{(h_1)}$; $i_{5h_2}^{(7)} = 1 - i_{57}^{(h_2)}$, де $i_{2'4}^{(h_1)} = -\frac{z_4}{z_{2'}}$, $i_{57}^{(h_2)} = -\frac{z_6 \cdot z_7}{z_5 \cdot z_{6'}}$ (знак визначено методом стрілок на рис. 3.19).

Таким чином передатні відношення ступенів наступні:

а) пари коліс 1 і 2 – $i_{12} = -z_2 / z_1$.

б) планетарного механізму з циліндричними колесами – $i_{2'h_1}^{(4)} = 1 + \frac{z_4}{z_{2'}}$.

в) планетарного механізму з конічними колесами – $i_{5h_2}^{(7)} = 1 + \frac{z_6 \cdot z_7}{z_5 \cdot z_{6'}}$.

Загальне передатне відношення багатоступінчастої передачі

$$i_{1h_2} = i_{12} \cdot i_{2'h_1}^{(4)} \cdot i_{5h_2}^{(7)} = -\left(\frac{z_4}{z_{2'}}\right) \cdot \left(1 + \frac{z_4}{z_{2'}}\right) \cdot \left(1 + \frac{z_6 \cdot z_7}{z_5 \cdot z_{6'}}\right).$$

в). Особливості диференціальних планетарних механізмів

Відзначимо особливості диференціальних планетарних механізмів ($W \geq 2$). В кінематичному відношенні такі механізми – це «суматори рухів»: ланкам можна задати W незалежних рухів і рух решти ланок буде цілком визначеним. В силовому відношенні вони є диференціальними: прикладений крутний момент можна задати тільки на одній з ланок і при цьому на решті ланок моменти будуть цілком визначеними, а їх розподіл визначатиметься

геометричними параметрами самого механізму. Своєрідним диференціальним важелем, на якому здійснюється розподіл сил є сателіт, а спільно з центральними колесами здійснюється розподіл крутних моментів. Важільні диференціальні механізми застосовують для розподілу сил. Так, наприклад, для ефективної очистки лобового скла автомобіля щітка необхідно прижмати в декількох точках. На наведеному рис. 3.20 сила P за допомогою трьох диференціальних важелів розподілена на 4 рівних частини, які прикладені в точках A , B , C і D .

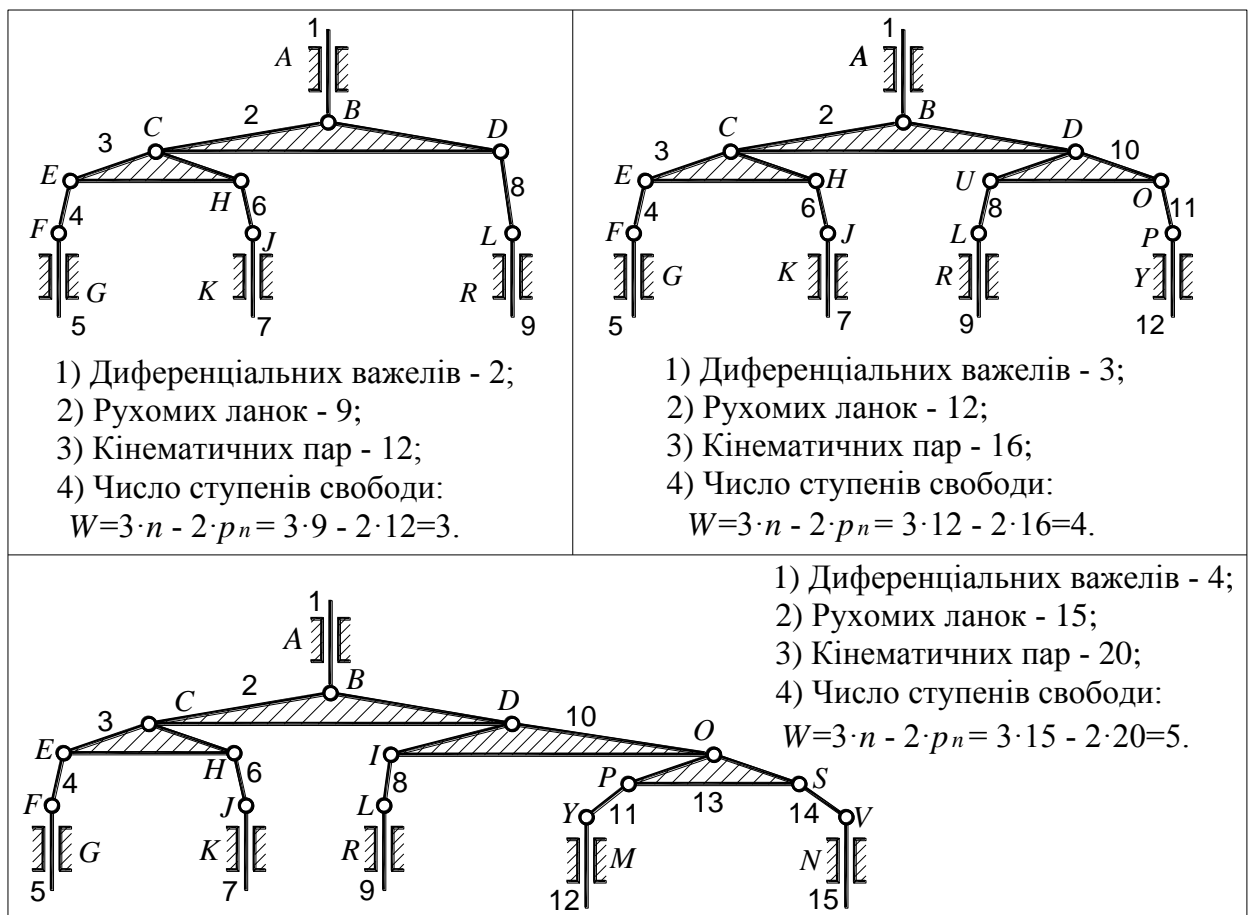
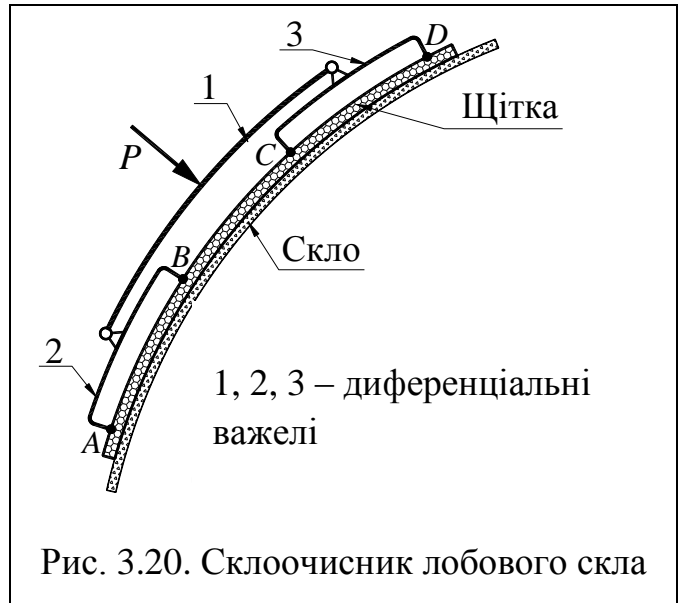


Рис. 3.21. Диференціальні важільні механізми

Один диференціальний важіль надає два ступеня свободи, а кожний додатковий додає ще один додатковий ступінь свободи (див. рис. 3.21).

Аналогічно, якщо ми маємо намір створити диференціальний планетарний механізм, у якого $W > 2$, необхідно додатково додати стільки планетарних механізмів, на скільки треба додатково збільшити W . Необхідність мати $W > 2$ виникає при створенні планетарних КЗП (рис. 3.22). Механізм на рисунку має $W = 3$. Управління здійснюється за допомогою трьох гальмівних пристроїв $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ і трьох муфт M_1, M_2, M_3 . Кожний гальмівний пристрій зменшує число ступенів свободи на одиницю. За допомогою муфт здійснюється з'єднання двох ланок, в результаті чого число ступенів свободи також зменшується на одиницю. При включенні будь-якої передачі необхідно задіяти два елемента управління, щоб число ступенів свободи КЗП було рівним 1. В даній КЗП тільки 5 передач, хоча наявні елементи управління дозволяють отримати значно більшу кількість. «Зайві» елементи управління застосовані для того, щоб отримати необхідний ряд передатних відношень.

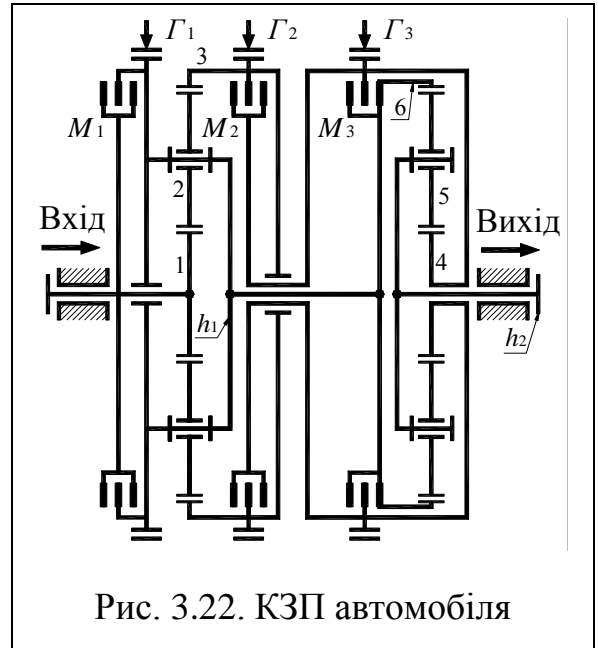


Рис. 3.22. КЗП автомобіля

г). Графічна кінематика планетарних механізмів

1) Механізми з циліндричними колесами

Метод графічного дослідження кінематики механізмів з циліндричними колесами базується на теорії плоскопаралельного руху твердого тіла, відповідно до якої в будь-який момент часу такий рух можна представити як обертальний навколо миттєвого центру швидкостей (МЦШ). Центральні колеса і водило механізму обертаються навколо нерухомих осей обертання. Сателіт здійснює складний рух: обертається навколо своєї осі і осі механізму. У будь-який момент часу цей рух можна представити як обертальний навколо МЦШ. Лінійна швидкість довільної точки ланки дорівнює добутку кутової швидкості ланки на відстань від даної точки до миттєвої осі обертання.

Покажемо застосування графічного методу кінематичного аналізу на прикладі редуктора Джемса з $W=2$ (рис. 3.23). Будемо вважати відомими числа зубців коліс і їхні діаметри. Механізм викреслений в масштабі μ_l .

На ланках у місцях їхнього взаємного дотикання намічаємо вузлові точки O, A, B і C на обох проекціях механізму. Точки A і C – це точки дотикання початкових окружностей коліс 1-2 і 3-4 відповідно. При $W = 1$ буде-

мо вважати заданими ω_1 і ω_4 . Визначаємо швидкості точок A і C : $V_A = \omega_1 \cdot r_1$ і $V_C = \omega_4 \cdot r_4$. В масштабі μ_v з точок A і C базисної лінії (на лівій проекції механізму) відрізками $Aa = V_A / \mu_v$ і $Cc = V_C / \mu_v$ зображаємо вектори \vec{V}_A і \vec{V}_C (див. рис. 3.23, проекція зліва).

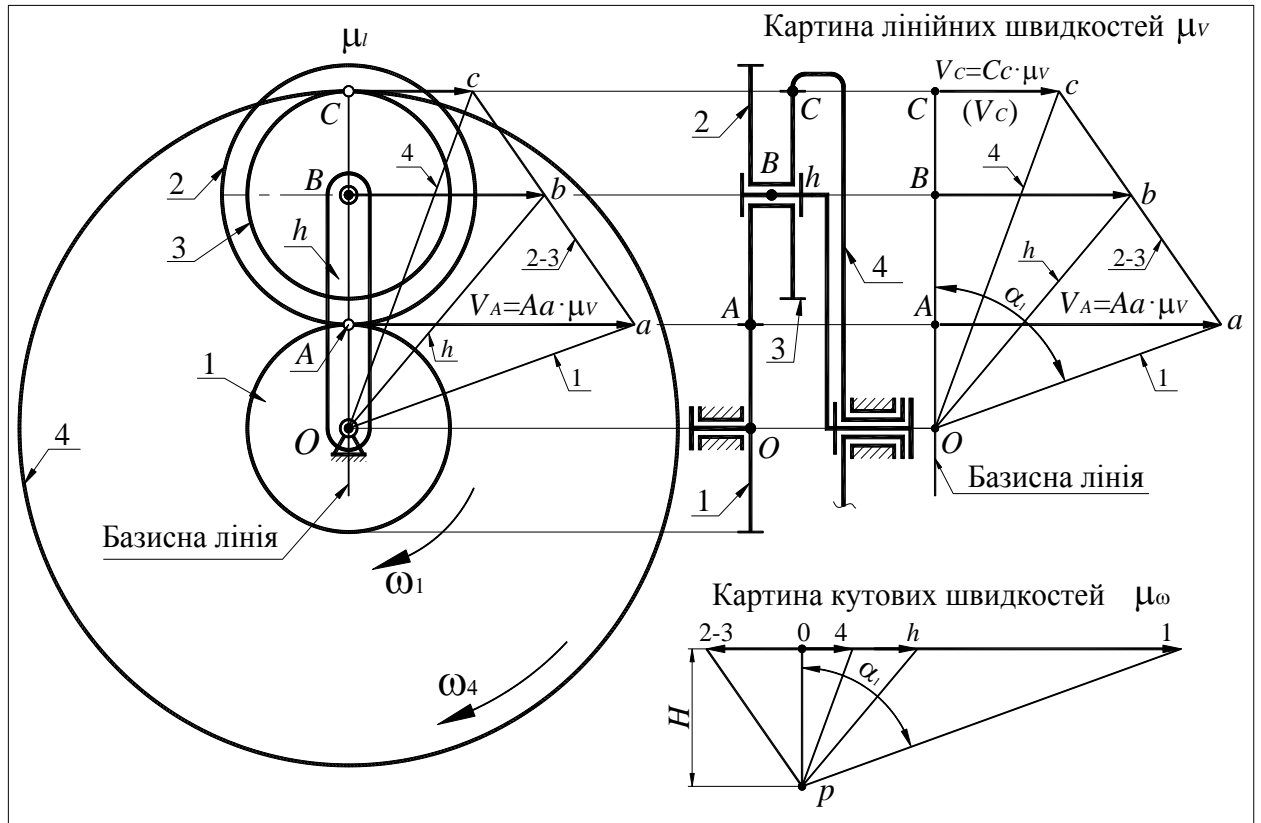


Рис. 3.23. Картини лінійних і кутових швидкостей для механізму Джемса

Зауважимо, що швидкості V_A і V_C – це також швидкості точок A і C блока сателітів 2-3, тобто швидкості однієї ланки. Через точки a і c проводимо лінію розподілу лінійних швидкостей «2-3» по блоку сателітів. МЦШ блоку сателітів знаходиться на перетині лінії розподілу лінійних швидкостей «2-3» з базисною лінією (за рамками рис. 3.23). Лінії проведені з кінців векторів \vec{V}_A і \vec{V}_C в центр O є лініями розподілу лінійних швидкостей, відповідно по ланках 1 і 4. За допомогою лінії розподілу «2-3» визначаємо швидкість точки B блоку сателітів і водила h та проводимо лінію розподілу лінійних швидкостей по водилу – лінію h .

Примітка: в подальшому, при виконанні кінематичного аналізу буде більш зручно користуватись проекцією механізму, яка показана справа на рис. 3.23 і будувати картину лінійних швидкостей на базисній лінії (показана на рис. 3.23 справа).

Визначимо тангенс кута нахилу лінії розподілу лінійних швидкостей, наприклад, по ланці 1

$$\tan \alpha_1 = \frac{Aa}{OA} = \frac{V_A \cdot \mu_l}{r_1 \cdot \mu_v} = \omega_1 \cdot \frac{\mu_l}{\mu_v}. \quad (3.35)$$

Висновок: тангенс кута нахилу лінії розподілу лінійних швидкостей точок тіла пропорційний кутовій швидкості цього тіла, а знак кута нахилу вказує на напрямок кутової швидкості. Так у ланок 1, 4 і h однаковий напрямок кутових швидкостей, а у блока сателітів 2-3 – протилежний. Відзначена властивість лінії розподілу лінійних швидкостей точок тіла дає можливість побудувати картину кутових швидкостей ланок механізму. Для цього вибираємо вісь кутових швидкостей з точкою відліку позначеною цифрою «0». Від точки відліку відкладаємо полюсну відстань $H = Op$ з полюсом в точці p . З полюса p проводимо лінії розподілу лінійних швидкостей вузлових точок механізму до їх перетину з віссю кутових швидкостей ланок механізму. Точки перетину ліній розподілу лінійних швидкостей з віссю кутових швидкостей 1, 4, h і 2-3 є кінцями векторів кутових швидкостей ω_1 , ω_4 , ω_h і ω_{2-3} відповідно. Покажемо, що це дійсно так і визначимо масштаб картини кутових швидкостей. З трикутника $\Delta Op1$ на цій картині маємо, що $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{O1}{Op} = \frac{O1}{H}$.

Після підстановки значення $\operatorname{tg} \alpha_1$ до виразу (3.35) отримаємо

$$\frac{O1}{H} = \omega_1 \cdot \frac{\mu_l}{\mu_v}, \quad \text{звідки} \quad \omega_1 = O1 \cdot \frac{\mu_v}{\mu_l \cdot H}. \quad (3.36)$$

З виразу (3.36) випливає, що для решти відрізків на картині кутових швидкостей ($O4$, Oh і $O2-3$) буде той же співмножник – масштаб кутових швидкостей, що описується залежністю

$$\mu_\omega = O1 \cdot \frac{\mu_v}{\mu_l \cdot H}. \quad (3.37)$$

Приклад 4. Визначити аналітичним і графічним методами передатне відношення замкнутого планетарного механізму $i_{1h} = i_{6h}$ (рис. 3.24), якщо дано $z_1 = 30$, $z_2 = 20$, $z_3 = 70$, $z_4 = 80$, $z_5 = 30$, $z_6 = 20$, $\omega_1 = \omega_6$, $\omega_3 = \omega_4$.

Безпосередньо до складу планетарного механізму входять центральні колеса 1 і 4, сателіт 5 і водило h (схема 1 Джемса).

Через зубчаті колеса 1, 2 і 3 здійснено замикання центральних коліс 6 і 4. Спочатку визначимо W механізму.

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_n - p_b = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 4 = 1,$$

де $n = 5$ – число рухомих ланок (16, 34, 2, 5, h);

$p_n = 5$ – число нижчих кінематичних пар (16-0, 2-0, 5- h , 34- h , 34-0);

$p_b = 4$ – число вищих кінематичних пар (1-2, 2-3, 6-5, 4-5).

Оскільки $W = 1$, то, якщо задати $\omega_1 = \omega_6$, рух всіх ланок буде визначеним.

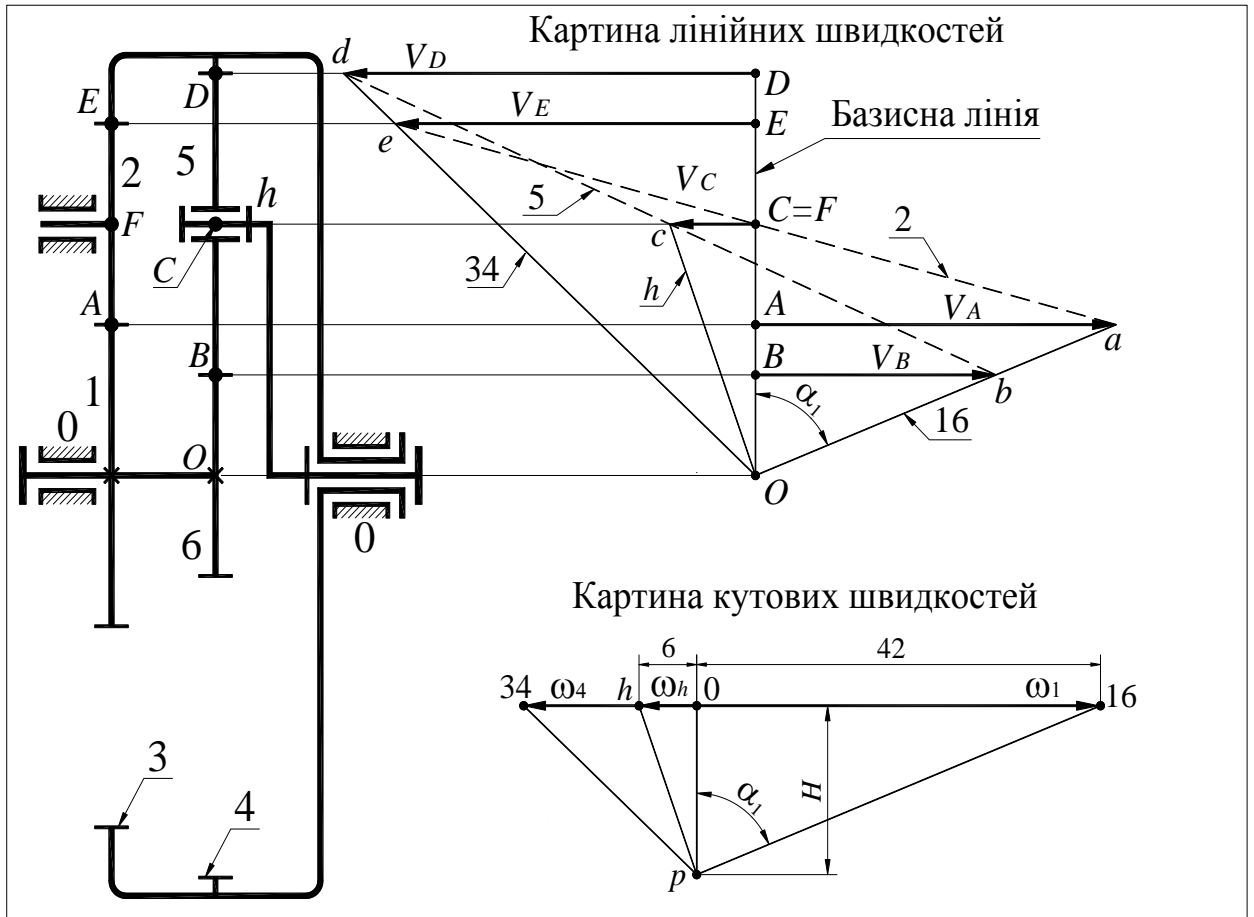


Рис. 3.24. Замкнутий планетарний механізм

Спочатку i_{1h} визначимо аналітично. Запишемо формулу Вілліса

$$i_{14}^{(h)} = \frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_4 - \omega_h} = -\frac{z_4}{z_6} = -u_{64}.$$

Кутові швидкості пов'язані залежністю $\omega_4 = \omega_1 \cdot \left(-\frac{z_1}{z_3} \right) = -\omega_1 \cdot u_{41}$.

Після підстановки в формулу Вілліса значення швидкості ω_4 отримаємо, що $i_{14}^{(h)} = \frac{\omega_1 - \omega_h}{-\omega_1 \cdot u_{41} - \omega_h} = -u_{64}$. Тоді передатне відношення $i_{1h} = i_{6h}$ буде

$$i_{1h} = \frac{\omega_1}{\omega_h} = \frac{u_{64} + 1}{1 - u_{41} \cdot u_{64}} = \frac{4 + 1}{1 - 0,4286 \cdot 4} = -7,$$

$$\text{де } u_{41} = \frac{z_1}{z_3} = \frac{30}{70} = 0,4286; u_{64} = \frac{z_4}{z_6} = \frac{80}{20} = 4.$$

Для визначення i_{1h} графічним методом на схемі механізму намічаємо вузлові точки O, A, B, C, D, E і F та переносимо їх на базисну лінію. Оскільки

необхідно визначити відношення швидкостей, то значення швидкості вхідної ланки не має значення.

Відрізком довільної довжини з точки A базисної лінії зображаємо швидкість точки A ланки 16 і проводимо лінію розподілу лінійних швидкостей точок ланки 16, провівши лінію з кінця вектора V_A в точку O . За допомогою лінії розподілу визначаємо швидкість точки B ланки 16. Швидкість V_A – це швидкість точки A і ланки 2, у якої $V_F = 0$, тобто нам відомі швидкості двох точок ланки 2. Пунктирною лінією проводимо лінію розподілу 2 швидкостей по ланці 2 і визначаємо швидкість точки E цієї ланки. Швидкість V_E є також швидкістю точки E ланки 34. З кінця вектора V_E до точки O проводимо лінію розподілу швидкостей точок ланки 34 і визначаємо швидкість V_D . Швидкість V_D – це також швидкість точки D сателіта 5, для якого уже відома швидкість точки B . Через точки b і d проводимо лінію розподілу швидкостей по сателіту 5 (пунктирна лінія) і визначаємо швидкість V_C – швидкість точки C сателіта і водила. Через точки c і O проводимо лінію розподілу швидкостей h по водилу. За побудованою картиною лінійних швидкостей будемо картину кутових швидкостей, на якій відрізки $l_{0h} = -6$ і $l_{0-16} = 42$ відповідно зображають швидкості ω_h і ω_1 .

$$\text{Тоді } i_{1h} = \frac{\omega_1}{\omega_h} = \frac{l_{0-16}}{l_{0-h}} = -\frac{42}{6} = -7. \text{ Результати співпадають.}$$

2) Механізми з конічними колесами

Метод графічного дослідження кінематики механізмів з конічними колесами базується на теорії складного сферичного руху твердого тіла, відповідно до якої такий рух можна уявити як обертальний навколо миттєвої осі обертання. Як і в плоских механізмах центральні колеса і водило механізму здійснюють простий рух – обертаються навколо нерухомих осей. Сателіт здійснює складний обертовий рух, який можна представити в трьох варіантах, що зображені на рис. 3.25.

На рис. 3.25 зліва показані три варіанти відображення складного руху сателіта. В першому варіанті ми вважаємо, що сателіт 2 рухається разом з центральним колесом 1 (переносний рух сателіта) і перекочується по колесу 1. На рисунку зліва зверху показані конуси 1 і 2 (початкові конуси цих коліс). Миттєва вісь обертання конуса 2 по конусу 1 (лінія OC) – це лінія їх контакту.

Аналогічно представляємо складний рух сателіта 2 разом з центральним колесом 4. В цьому випадку миттєва вісь обертання конуса 2 по конусу 4 – це також лінія контакту конусів 2 і 4, тобто лінія OA . Нарешті в третьому

варіанті ми вважаємо, що переносний рух здійснює водило h . При цьому конус 2 рухається разом h і відносно своєї осі OB . На рисунку 3.25 зліва в загальному вигляді для кожного з трьох варіантів складного руху сателіта 2 зображені вектори переносних $\omega_1, \omega_4, \omega_h$ і відносних $\omega_{21}, \omega_{24}, \omega_{2h}$ швидкостей.

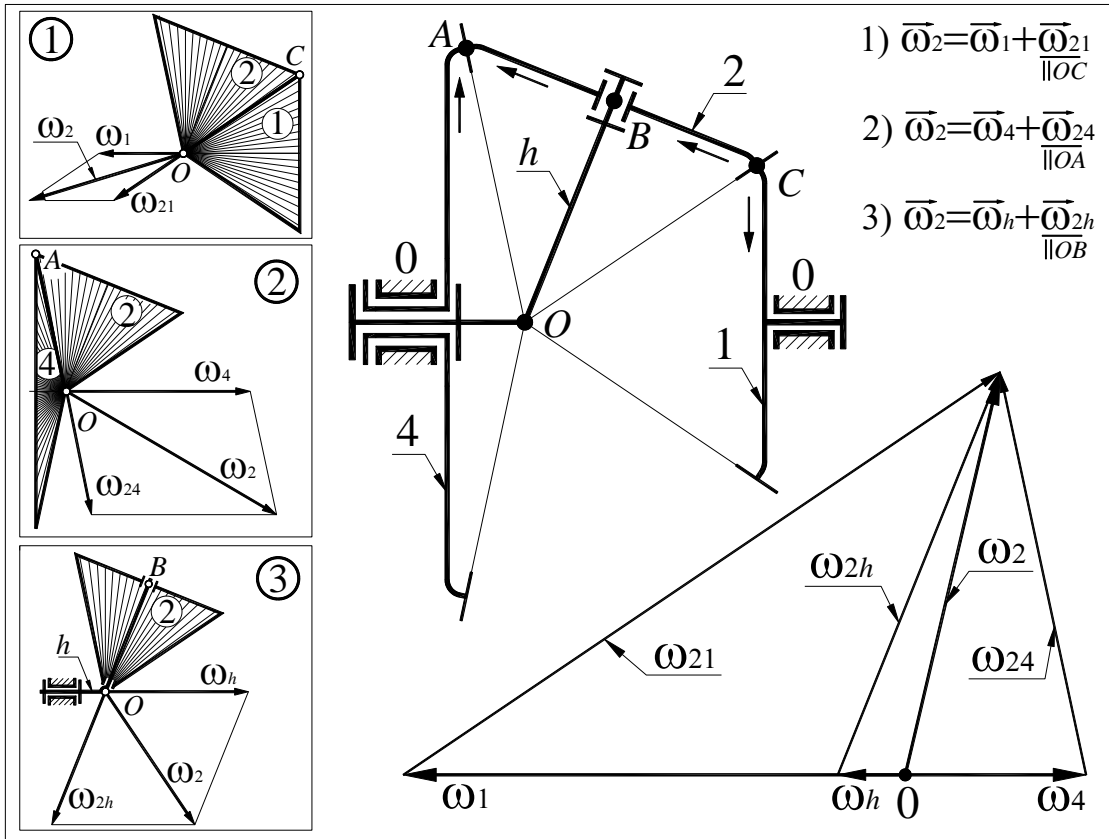


Рис. 3.25. Графічна кінематика конічного планетарного механізму Джемса

Запишемо векторні рівняння для визначення вектора складного руху сателіта для всіх трьох варіантів

$$\begin{aligned}
 1) \quad \vec{\omega}_2 &= \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{21} \quad (\vec{\omega}_{21} \parallel OC); \\
 2) \quad \vec{\omega}_2 &= \vec{\omega}_4 + \vec{\omega}_{24} \quad (\vec{\omega}_{24} \parallel OA); \\
 3) \quad \vec{\omega}_2 &= \vec{\omega}_h + \vec{\omega}_{2h} \quad (\vec{\omega}_{2h} \parallel OB).
 \end{aligned}
 \tag{3.38}$$

Примітка: Рівняння (3.38) наведені і на рис. 3.25 вгорі праворуч.

В механізмі немає зупинених ланок і число ступенів свободи становить

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_n - p_b = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2,$$

де $n = 4$ – число рухомих ланок (1, 2, 4, h);

$p_n = 4$ – число нижчих кінематичних пар (1-0, 4-0, 4- h , 2- h);

$p_b = 2$ – число вищих кінематичних пар (1-2, 4-2).

Таким чином рух всіх ланок буде визначеним, якщо задати рух двох ланок механізму, тоді рівняння (3.38) можна розв'язати графічно.

Задамо вектори швидкостей центральних коліс 1 і 4. Вибираємо точку відліку кутових швидкостей і позначаємо її цифрою «0», відкладаємо в масштабі задані вектори швидкостей (ω_1 і ω_4) і приступаємо до розв'язання системи рівнянь (3.38). З кінця вектора ω_1 проводимо промінь паралельно OC , а з кінця вектора ω_4 – промінь перпендикулярно OC до перетину з першим променем. Точка перетину цих променів – кінець вектора миттєвої кутової швидкості сателіта ω_2 . При цьому були визначені відносні кутові швидкості ω_{21} і ω_{24} . Після визначення ω_2 в рівнянні 3) системи рівнянь (3.38) невідомими залишились тільки величини ω_h і ω_{2h} , напрямки яких відомі. Фактично треба вектор ω_2 розкласти на напрямки векторів ω_h і ω_{24} . Для цього з кінця вектора ω_2 проводимо промінь за напрямком $\parallel OB$ до перетину з напрямком швидкості ω_h (на рисунку представлений горизонталлю від точки відліку «0»).

д). Кінематика міжколісного диференціалу

Для унеможливлення виникнення циркулюючої потужності колеса ведучого моста транспортного засобу повинні мати можливість обертатись з різними кутовими швидкостями при не прямолінійній траєкторії руху. Ця проблема вирішується за допомогою симетричного диференціалу (рис. 3.26).

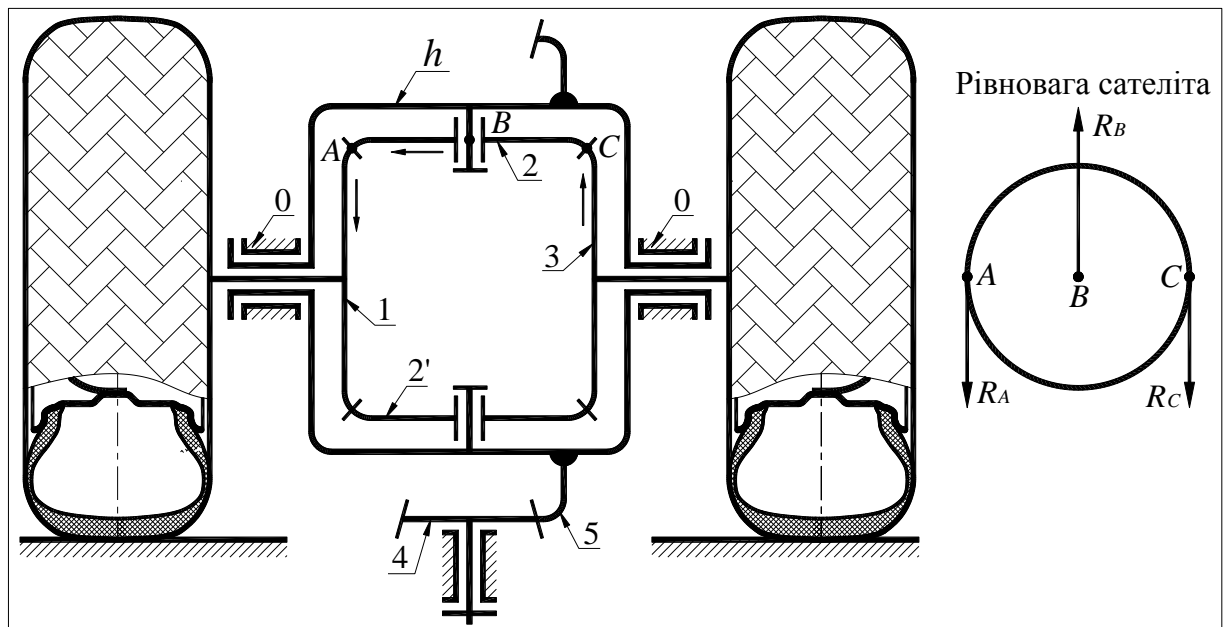


Рис. 3.26. Симетричний диференціал

Позначення на рис. 3.26 наступні:

1 і 3 – центральні колеса (напівосьові шестерні);

2 і 2' – сателіти;

h – водило (коробка диференціалу);

4 і 5 – колеса головної передачі;

0 – стояк (корпус ведучого моста автомобіля).

Визначимо W диференціалу (без головної передачі)

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_n - p_v = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2,$$

де $n = 4$ – число рухомих ланок (1, 2, 3, h);

$p_n = 4$ – число нижчих кінематичних пар (1- h , 3- h , 2- h , 0- h);

$p_v = 2$ – число вищих кінематичних пар (1-2, 3-2).

Формула Вілліса з урахуванням $z_1 = z_3$ прийме вигляд

$$i_{13}^{(h)} = \frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_3 - \omega_h} = -\frac{z_3}{z_1} = -1, \text{ звідки отримаємо } \omega_1 + \omega_3 = 2 \cdot \omega_h. \text{ Це означає, що}$$

ω_1 і ω_3 можуть бути різними, але їх сума завжди рівна $2 \cdot \omega_h$.

За умови рівноваги сателіта 2 (рис. 3.26, справа) сили в зачепленнях коліс 1-2 (точка А) і 3-2 (точка С) завжди однакові, тобто $R_A = R_C$, а оскільки $r_1 = r_3$, то завжди і крутні моменти на колесах ведучого моста будуть однаковими.

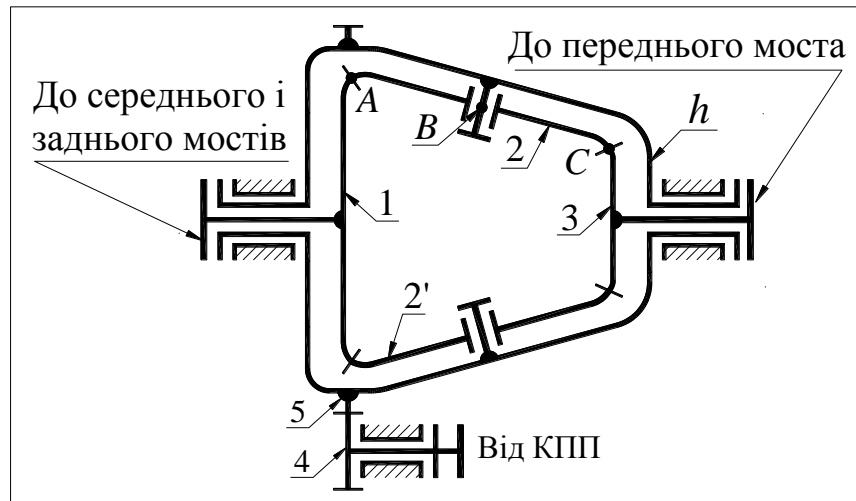


Рис. 3.27. Не симетричний диференціал

Циркулююча потужність може виникати і в контурі між ведучими мостами. Для мінімізації такого явища в автомобілях з трьома ведучими мостами здійснюється розподіл крутого моменту між переднім мостом і двома задніми на дві частини за допомогою не симетричного диференціалу (рис. 3.27): $1/3$ – на передній міст і $2/3$ на два задніх.

В цьому механізмі на сателіті 2 здійснюється розподіл сил (як і в симетричному), тобто $R_A = R_C$, але $r_1 = 2r_3$ і відповідно $M_1 = 2M_3$.

е). Метричний синтез планетарних передач

Завдання синтезу полягає у підборі чисел зубців коліс передачі за низкою умов та вимог. Важливо при цьому знати призначення механізму. Якщо це кінематичний механізм, то головним параметром є передатне відношення, воно повинно бути точно таким як потрібно, а для силових передач можна його реалізувати з точністю $\pm 4\%$. Для силових механізмів важливим параметром є коефіцієнт корисної дії (ККД), для кінематичних механізмів цей параметр менш важливий. В залежності від призначення механізму вибирається схема. Так для силових механізмів переважно застосовують механізми типу Джемса. Після вибору виду схеми механізму можна переходити до задачі розрахунку чисел зубців коліс. Варто підкреслити, що задача має багатоваріантне рішення, тобто множину наборів чисел зубців коліс, що задовольняють умові задачі. Умови і вимоги, які необхідно врахувати при синтезі планетарної передачі наступні:

- 1) умова забезпечення передатного відношення;
- 2) умова співвісності;
- 3) умова збирання;
- 4) умова сусідства;
- 5) умова не заклинювання пари коліс внутрішнього зачеплення.

Розглянемо наведені умови більш детально.

1) Умова забезпечення передатного відношення

При розгляді властивостей різних схем планетарних механізмів це питання було досить детально розглянуто, тому питання, як реалізувати необхідне передатне відношення, розглянемо досить стисло.

При підборі чисел зубців для схем 1 і 2 зазвичай в першу чергу треба задатися значенням z_1 , від величини якого залежить сумарна кількість зубців всіх коліс механізму і відповідно габарити. Вдалий вибір z_1 впливає не тільки на реалізацію необхідного передатного відношення, а й на реалізацію інших умов. Якщо застосовуються колеса, що виготовлені без зміщення інструменту (нульові колеса), то рекомендується приймати $z_1 \geq 18$. В більшості випадків в планетарних механізмах застосовують три сателіта ($k = 3$), що покращує їх самоустановку відносно центральних коліс. Причому у більшості випадків якщо прийняти z_1 кратним числу k , то це позитивно вплине і на умову збирання. Необхідна інформація до питання реалізації необхідного передатного відношення наведена в таблиці нижче.

Таблиця 3.1

Схема	Вхідна ланка	Вихідна ланка	Передатне відношення	Визначити співвідношення чисел зубців	Примітка
Схема 1	1	h	$i_{1h}^{(4)} = 1 + z_4 / z_1$	z_4 / z_1	Редуктор
Схема 2	1	h	$i_{1h}^{(4)} = 1 + \frac{z_4 \cdot z_2}{z_1 \cdot z_3}$	$\frac{z_4 \cdot z_2}{z_1 \cdot z_3}$	Редуктор
Схема 3	h	1	$i_{h1}^{(4)} = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_3 - z_4 \cdot z_2}$	$\frac{z_4 \cdot z_2}{z_1 \cdot z_3}$	Редуктор
Схема 4	h	1	$i_{h1}^{(4)} = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_3 - z_4 \cdot z_2}$	$\frac{z_4 \cdot z_2}{z_1 \cdot z_3}$	Редуктор

2) Умова співвісності

Умова співвісності відображає вимогу, щоб осі центральних коліс (коліс 1 і 4) збігалися. На рис. 3.28 показані схеми найбільш поширених механізмів і вказані геометричні параметри, співвідношення яких забезпечує збігання осей центральних коліс.

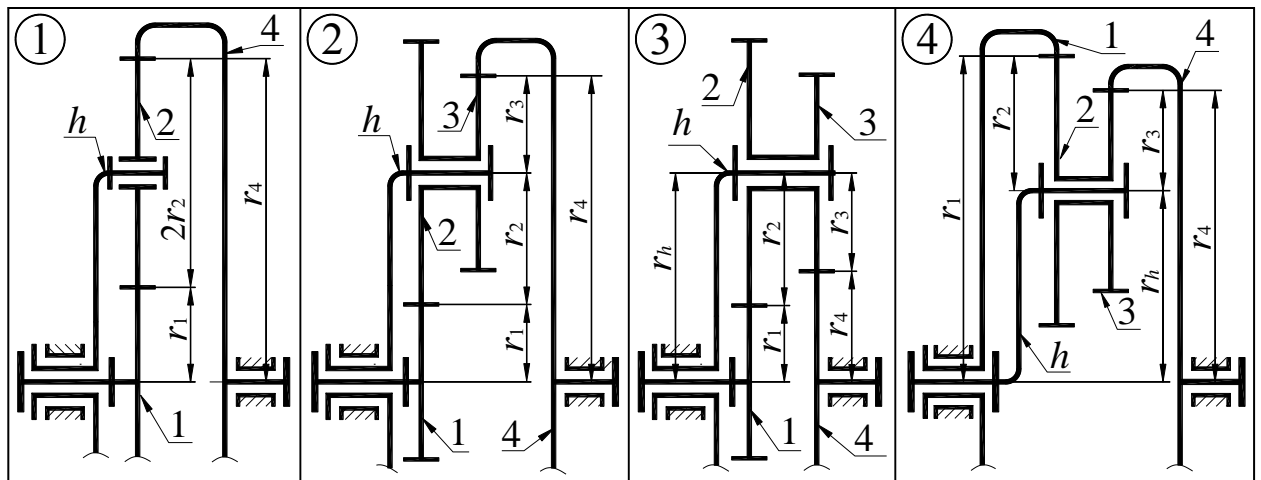


Рис. 3.28. До визначення співвісності

В таблиці 3.2 наведені співвідношення радіусів коліс, які забезпечують збігання осей коліс 1 і 4. Якщо модулі всіх коліс однакові, тоді умову співвісності можна виразити через співвідношення чисел зубців коліс.

В якості прикладу розглянемо синтез механізму за схемою 2. Необхідно підібрати числа зубців передачі, якщо $i_{1h}^{(4)} = 13$, $k=3$, передача силова.

$$\text{З формули } i_{1h}^{(4)} = 1 + \frac{z_4 \cdot z_2}{z_1 \cdot z_3} \text{ визначаємо } \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = i_{1h}^{(4)} - 1 = 13 - 1 = 12.$$

Співвідношення $\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = 12$ представимо у вигляді $\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} = 12$,

де, наприклад, $\frac{z_2}{z_1} = i_{12} = 3$, $\frac{z_4}{z_3} = i_{34} = 4$.

Прийmemo $z_1 = 18$, тоді $z_2 = i_{12} \cdot 18 = 3 \cdot 18 = 54$.

Виразимо z_4 через z_3 , в результаті чого отримаємо $z_4 = i_{34} \cdot z_3 = 4 \cdot z_3$.

Підставимо значення z_1 , z_2 , z_3 і z_4 в умову співвісності $z_1 + z_2 + z_2 = z_4$.

$$18 + 54 + z_3 = 4 \cdot z_3,$$

звідки $3 \cdot z_3 = 72$, відповідно $z_3 = 72/3 = 24$.

Визначимо число зубців колеса 4

$$z_4 = i_{34} \cdot z_3 = 4 \cdot 24 = 96.$$

Таблиця 3.2

Умови співвісності

Схема 1	Схема 2	Схема 3	Схема 4
$r_1 + 2 \cdot r_2 = r_4$	$r_1 + r_2 + r_2 = r_4$	$r_h = r_1 + r_2 = r_3 + r_4$	$r_h = r_1 - r_2 = r_4 - r_3$
$z_1 + 2 \cdot z_2 = z_4$	$z_1 + z_2 + z_2 = z_4$	$z_1 + z_2 = z_3 + z_4$	$z_1 - z_2 = z_4 - z_3$

3) Умова збирання

Механізм з одним блоком сателітів завжди можна зібрати, як наприклад, механізм за схемою 4 (рис. 3.17, схема 4, праворуч), у якого водило – це фактично ексцентриковий вал. Проблема збирання механізму виникає при застосуванні декількох блоків сателітів, причому з вимогою рівномірного їх розташування (під рівними кутами) в механізмі. При розташуванні сателітів під рівними кутами центр мас вузла водило-сателіти буде співпадати з віссю механізму і в принципі не буде потреби виконувати зрівноваження цього вузла. Окрім того рівнодіючі в зачепленнях сателітів з центральними колесами будуть рівні нулю, і відповідно буде відсутнє навантаження на вали центральних коліс. До того ж в цьому випадку ($k > 1$) всі блоки сателітів ідентичні, тобто взаємне розташування зубців сателітів 2 і 3 на всіх блоках однаково. Це раціонально і з точки зору виготовлення.

Умову збирання отримаємо, розглянувши сам процес збирання планетарного механізму, наприклад, за схемою 2 (див. рис. 3.29).

Введемо наступні припущення:

- 1) усі блоки сателітів (колеса 2-3) однакові;
- 2) колесо 4 нерухоме ($\omega_4 = 0$);
- 3) колесо 1 не закріплене (може вільно прокручуватися для встановлення 1-го блоку сателітів).

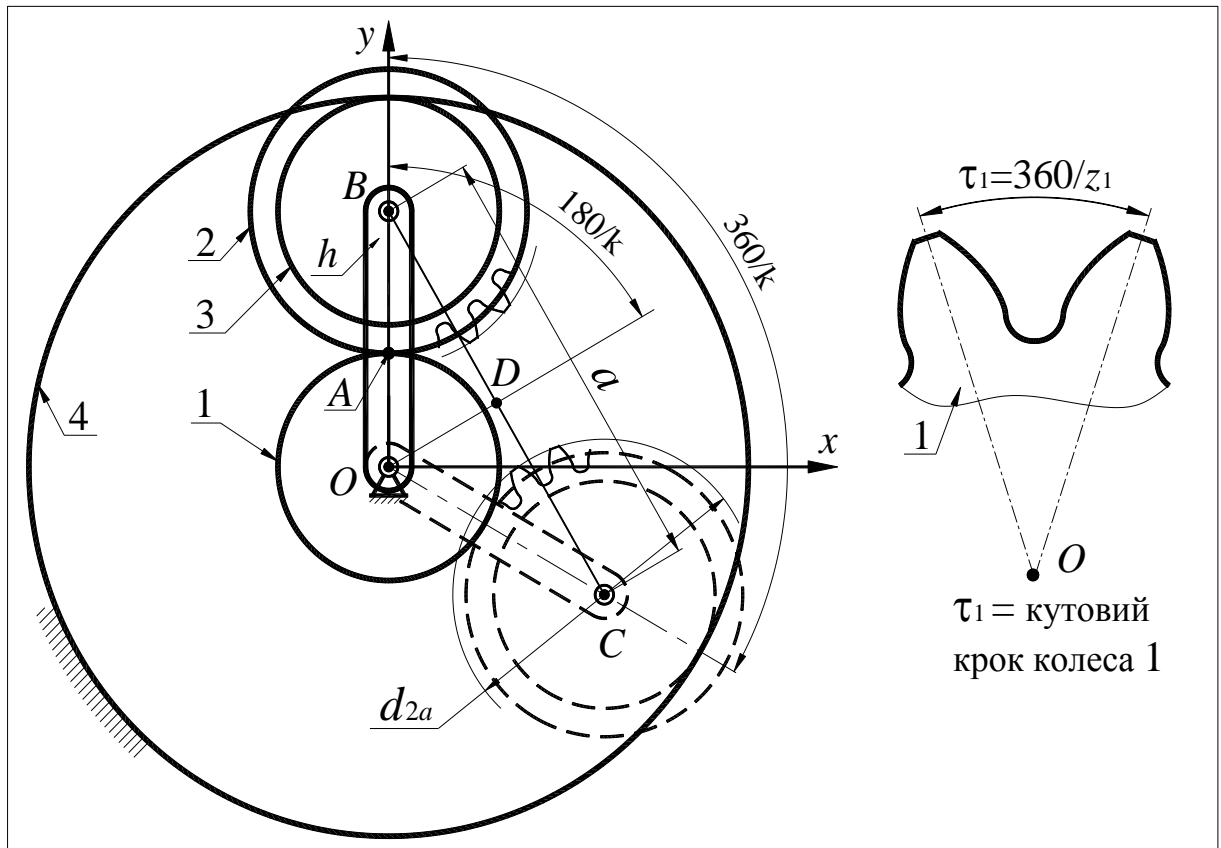


Рис. 3.29. До визначення умов збирання та сусідства

Перший блок сателітів встановлюємо так, щоб його центр B лежав на осі Oy . Потім водило h з першим блоком сателітів повертаємо на кут $\varphi_h = 360^\circ / k$, де k – число сателітів. На місце, що звільнилося, намагаємося встановити наступний блок сателітів. Якщо в результаті повороту водила на кут φ_h , колесо 1 повернеться на ціле число кроків, то на місце, що звільнилося, новий блок сателітів встановиться. Тобто складання виконується, якщо

$$\varphi_1 / \tau_1 = c, \quad (3.39)$$

де $\varphi_1 = \varphi_h \cdot i_{1h}^{(4)}$ – кут повороту колеса 1;

$\tau_1 = 360 / z_1$ – кутовий крок колеса 1 (див. рис. 3.29);

c – ціле число.

Якщо колесо 1 повернеться не на ціле число кроків, слід спробувати досягти бажаного, повернувши додатково водило h в будь-який бік на кілька обертів. Отже кут повороту водила у загальному випадку дорівнює

$$\varphi_h = 360^\circ / k + 360^\circ \cdot p, \quad (3.40)$$

де p – будь-яке ціле число.

Тоді

$$\varphi_1 = i_{1h}^{(4)} \cdot (360^\circ / k + 360^\circ \cdot p). \quad (3.41)$$

Після підстановки в (3.39) значень τ_1 і φ_1 отримаємо

$$\frac{i_{1h}^{(4)} \cdot z_1}{k} (1 + kp) = c. \quad (3.42)$$

Позначимо $\frac{i_{1h}^{(4)} \cdot z_1}{k} = c_0$, тоді

$$c_0 \cdot (1 + kp) = c. \quad (3.43)$$

Якщо c_0 не є цілим числом, слід підібрати таке p , щоб при заданому k цілим було c .

Для механізму Джемса за схемою 1 досить просто можна отримати умову збирання іншим способом. Так на рис. 3.30 у замкнутому контурі, який показано жирною лінією, міститься ціле число кроків: в нього входять всі кроки сателіта 2 (ділянки контуру ab і ce), кроки колеса 1 – z_1/k (ділянка контуру ae) і кроки колеса 3 – z_3/k (ділянка контуру bc). Оскільки z_2 є цілим числом, тоді умова збирання має вигляд $\frac{z_1 + z_3}{k} = c$. Такий же результат вихо-

дить з формули $\frac{i_{1h}^{(4)} \cdot z_1}{k} = c_0$.

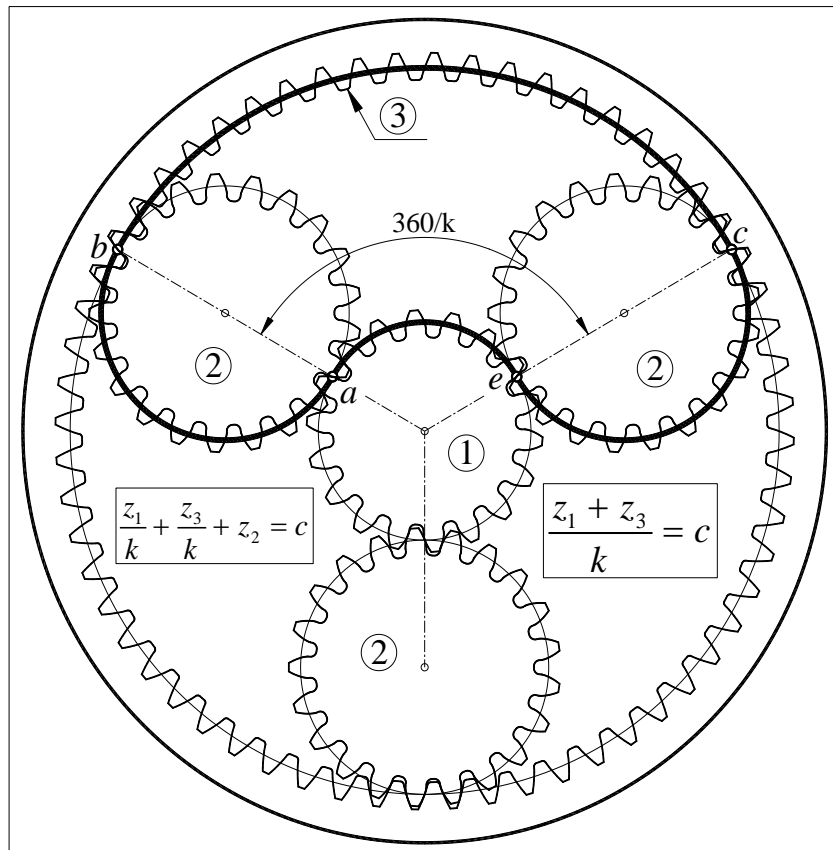


Рис. 3.30. До визначення умови збирання для схеми 1

Виконаємо перевірку виконання умови збирання для розглянутого вище прикладу, в якому $z_1 = 18$, $z_2 = 54$, $z_3 = 24$, $z_4 = 96$.

$$\text{Передатне відношення } i_{1h}^{(4)} = 1 + \frac{z_4 \cdot z_2}{z_1 \cdot z_3} = 1 + \frac{96 \cdot 54}{18 \cdot 24} = 13.$$

$$\text{Умова збирання } \frac{i_{1h}^{(4)} \cdot z_1}{k} = \frac{13 \cdot 18}{3} = 78. \text{ Умова збирання виконується.}$$

Примітка: при $k = 3$ і якщо $\frac{i_{1h}^{(4)} \cdot z_1}{k} = c_0$ – це кінцевий десятковий дріб, то умова завжди виконується, оскільки співмножник $(1 + kp)$ при $p = 3, 33, \dots$ і т. п. тоді буде $(1 + kp) = 10^n$.

4) Умова сусідства

Описує вимогу, щоб сателіти не торкалися одне одного (див. рис.3.29).

З рис. 3.29 умова сусідства виконується якщо

$$a > d_{2a}. \quad (3.44)$$

З трикутника $\triangle OBD$ маємо

$$a = 2BD = 2OB \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{k}\right) = 2(r_1 + r_2) \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{k}\right). \quad (3.45)$$

З урахуванням, що $r_1 = 0,5mz_1$, $r_2 = 0,5mz_2$, міжосьова відстань a буде визначатись залежністю

$$a = m(z_1 + z_2) \cdot \sin(180^\circ / k). \quad (3.46)$$

Діаметр кола вершин зубців сателіту дорівнює

$$d_{2a} = m(z_2 + 2). \quad (3.47)$$

Після підстановки в (3.44) виразів (3.46) і (3.47) отримаємо

$$a = m(z_1 + z_2) \cdot \sin(180^\circ / k) > m(z_2 + 2),$$

звідки отримаємо умову сусідства в остаточному вигляді

$$\sin\left(\frac{180^\circ}{k}\right) > \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}. \quad (3.48)$$

Примітка: якщо $z_3 > z_2$, тоді умова сусідства буде мати наступний вигляд:

$$\sin\left(\frac{180^\circ}{k}\right) > \frac{z_3 + 2}{z_1 + z_2}.$$

Виконаємо перевірку виконання умови сусідства для розглянутого вище прикладу, в якому $z_1 = 18$, $z_2 = 54$, $z_3 = 24$.

$$\sin\left(\frac{180^\circ}{k}\right) = \sin 60^\circ = 0,866; \quad \frac{z_3 + 2}{z_1 + z_2} = \frac{24 + 2}{18 + 54} = 0,36.$$

Умова сусідства виконується.

5) Умова не заклинювання пари коліс внутрішнього зачеплення

В даному випадку пара коліс внутрішнього зачеплення – це колеса 3 і 4. Умова може виконуватись лише тоді, коли $z_3 \geq 18$. Якщо $z_3 = 17$, тоді $z_4 = \infty$ і це буде рейкове зачеплення. При заданому значенні z_3 число зубців колеса з внутрішніми зубцями повинно бути не менше ніж: $z_4 \geq (z_3^2 - 34) / (2z_3 - 34)$. За даною формулою були визначені значення z_4 в залежності від z_3 . Результати розрахунків наведені в таблиці нижче.

Таблиця 3.3

Співвідношення чисел зубців за умови відсутності інтерференції

Внутрішнє зачеплення			
z_3	z_4	z_3	z_4
17	∞	23	>41
18	>144	24	>38
19	>81	25	>36
20	>60	26	>35
21	>50	27 - 79	> $z_3 + 8$
22	>41	80 і більше	> $z_3 + 7$

Якщо умова 5) порушується, то пара коліс заклинить (див. рис. 3.31).

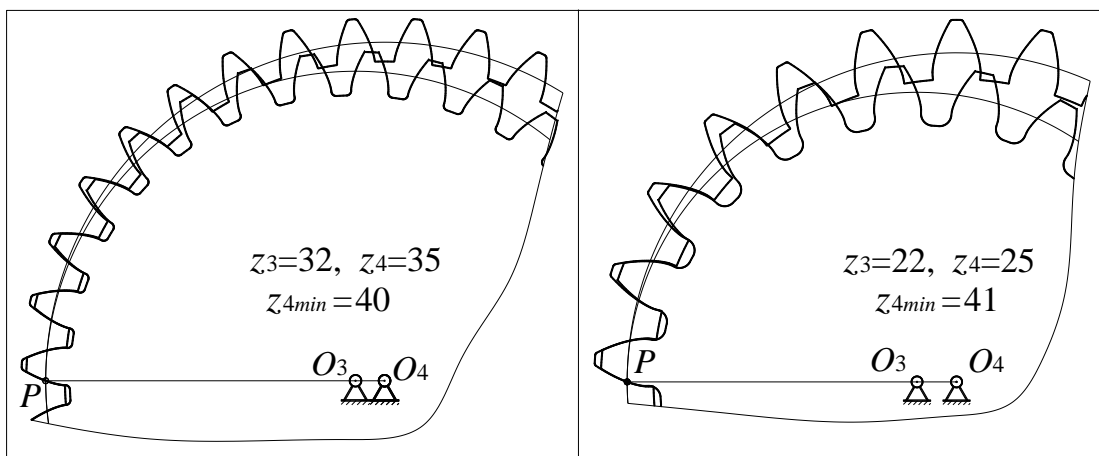


Рис. 3.31. Приклади інтерференції профілів зубців

З наведеного прикладу видно, що накладення профілів зубців відбувається при вході в зачеплення і при виході з нього.

Підбір чисел зубців для механізмів за схемами 3 і 4 дещо складніший і має свої особливості. Розглянемо це питання на конкретному прикладі.

Приклад 5. Необхідно підібрати числа зубців для передачі за схемою 3, якщо $i_{h1}^{(4)} = 35$, тобто $i_{h1}^{(4)} = \frac{1}{1 - i_{14}^{(h)}} = 35$. Після спрощень отримаємо

$$i_{14}^{(h)} = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = \frac{34}{35}.$$

Для розв'язання цієї задачі зазвичай користуються методом проб. У якості універсального методу підбору чисел зубців коліс за умовою заданого передатного відношення й умовою співвісності (із наступною перевіркою виконання інших умов) можна рекомендувати метод співмножників. Він зручний при доборі чисел зубців коліс механізмів, виконаних за схемами 3 і 4. Розглянемо цей метод для схеми 3 даного прикладу.

Уявимо співвідношення чисел зубців коліс (нескорочуваний дріб) у вигляді співмножників, тобто

$$\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = \frac{34}{35} = \frac{c_2 \cdot c_4}{c_1 \cdot c_3} = \frac{2 \cdot 17}{5 \cdot 7}.$$

При цьому нехай

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{2}{5} \text{ і } \frac{z_4}{z_3} = \frac{c_4}{c_3} = \frac{17}{7},$$

тоді

$$z_4 = z_3 \frac{c_4}{c_3}, \text{ а } z_2 = z_1 \cdot \frac{c_2}{c_1}.$$

Підставимо значення z_2 і z_4 в умову співвісності $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ (схема 3), отримаємо, що $z_1 + z_1 \cdot \frac{c_2}{c_1} = z_3 + z_3 \cdot \frac{c_4}{c_3}$. Після спрощень вираз прийме наступний вигляд:

$$z_1 \cdot c_3 (c_1 + c_2) = z_3 \cdot c_1 (c_3 + c_4). \quad (3.49)$$

Співвідношення (3.49) буде тотожністю, якщо прийняти

$$z_1 = c_1 (c_3 + c_4) \text{ і } z_3 = c_3 (c_1 + c_2),$$

тоді

$$z_2 = c_2 (c_3 + c_4) \text{ і } z_4 = c_4 (c_1 + c_2). \quad (3.50)$$

Отримані значення z_i – це один із варіантів чисел зубців, що задовольняють умові співвісності і заданого передатного відношення.

У загальному випадку

$$z_1 = c_1(c_4 + c_3) = 5(17 + 7) = 120 \cdot \gamma;$$

$$z_2 = c_2(c_4 + c_3) = 2(17 + 7) = 48 \cdot \gamma;$$

$$z_3 = c_3(c_1 + c_2) = 7(5 + 2) = 49 \cdot \gamma;$$

$$z_4 = c_4(c_1 + c_2) = 17(5 + 2) = 119 \cdot \gamma.$$

Прийнявши попередньо $\gamma = 1$, одержимо

$$z_1 = 120; \quad z_2 = 48; \quad z_3 = 49; \quad z_4 = 119.$$

Перевіряємо виконання умови збирання і сусідства. Умова збирання:

$$\frac{z_1 \cdot i_{h1}^{(4)}}{k} (1 + kp) = c.$$

Оскільки $i_{h1}^{(4)} = \frac{1}{i_{1h}^{(4)}}$, умова збирання набуває вигляду $\frac{z_1}{k \cdot i_{h1}^{(4)}} (1 + kp) = c$.

Маємо $c_0 = \frac{z_1}{k \cdot i_{h1}^{(4)}} = \frac{120}{3 \cdot 35} = \frac{8}{7}$. Тобто, якщо вдасться підібрати таке p ,

при якому $(1 + kp)$ буде кратним числу 7, то умова складання виконається. Наприклад, при $p = 2$ маємо, що $(1 + kp) = (1 + 3 \cdot 2) = 7$ – умова складання виконується.

Перевіряємо виконання умови сусідства:

$$\sin \frac{180^\circ}{k} > \frac{z_c + 2}{z_{\text{ц}} \pm z_c}.$$

У цьому механізмі більшим сателітом є колесо 3, тобто $z_c = z_3$, тоді $z_{\text{ц}} = z_4$, зачеплення зовнішнє, тому знак «+».

$$\text{Маємо} \quad \sin \frac{180^\circ}{k} > \frac{z_3 + 2}{z_4 + z_3}; \quad \sin \frac{180^\circ}{k} = \sin 60^\circ = 0,966;$$

$$\frac{z_3 + 2}{z_4 + z_3} = \frac{49 + 2}{119 + 49} = 0,3$$

$0,966 > 0,3$ – умова сусідства виконується.

Зважаючи на те, що числа зубців всіх коліс $z_i > z_{\min} = 17$, умова заклинювання також виконується.

Формули для визначення чисел зубців, які задовольняють умовам передатного відношення і співвісності для схеми 4 наведені нижче:

$$\begin{aligned} z_1 &= c_1(c_4 - c_3); \\ z_2 &= c_2(c_4 - c_3); \\ z_3 &= c_3(c_1 - c_2); \\ z_4 &= c_4(c_1 - c_2). \end{aligned} \tag{3.51}$$

Розглянута методика підбору чисел зубців досить ефективна при синтезі кінематичних передач, коли компроміс відносно передатного відношення не допустимий. Але при цьому досить часто отримуються такі результати, що в схемі 4 можна застосувати тільки один сателіт, або для виконання умови збирання треба скористатись занадто великим значення γ . При синтезі силових передач буде більш доцільним поступитись точністю реалізації передатного відношення в межах допустимого відхилення заради покращення інших властивостей передачі (сумарне число зубців, можливість встановити не один сателіт і т. п.)

3.6. Хвильова передача

Хвильова передача – це механічна передача (зубчаста, фрикційна, гвинтова), в якій обертання перетворюється на циклічне збудження хвиль деформації в так званому гнучкому елементі. Найбільш поширена зубчаста хвильова передача, яка зазвичай складається з жорсткого елемента (зубчастого колеса з внутрішніми зубцями), гнучкого елемента (циліндричної тонкостінної шестерні, виконаної у вигляді стаканів із зовнішніми зубцями, число яких дещо менше кількості зубців жорсткого колеса) і генератора хвиль.

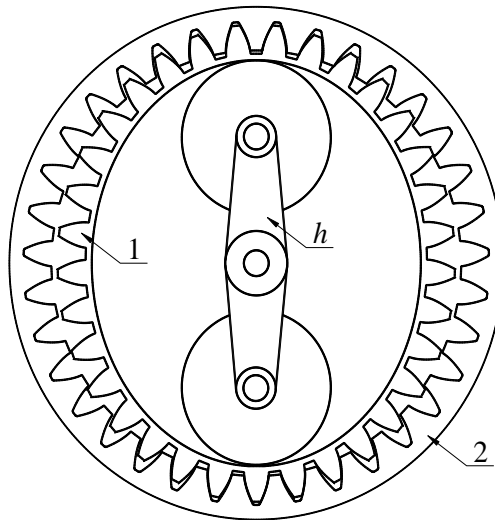


Рис. 3.32. Модель хвильової передачі

Гнучке колесо закріплене на вихідному валу і розташоване всередині жорсткого колеса. Генератор хвиль вставлений співвісно до гнучкого колеса і при обертанні деформує його, утворюючи хвилю. Число хвиль деформації дорівнює кількості виступів кулачка. У вершинах хвиль зубці гнучкого колеса повністю входять у зачеплення із зубцями жорсткого, а у западинах хвиль повністю з нього виходять. Хвилі деформації рухаються з тією ж кутовою швидкістю, що і генератор, тобто в гнучкому колесі збуджуються хвилі, що

«біжать», а у їх вершинах відбувається зачеплення. Різниця чисел зубців жорсткого та гнучкого коліс зазвичай дорівнює або кратна числу хвиль деформації. Залежно від числа хвиль хвильові передачі називаються однохвильовими, двоххвильовими або трихвильовими. На рис. 3.32 показана модель двоххвильової передачі, в якій 1 – гнучке колесо, 2 – жорстке колесо і h – роликотий генератор хвиль. Конструкція генераторів може бути різною.

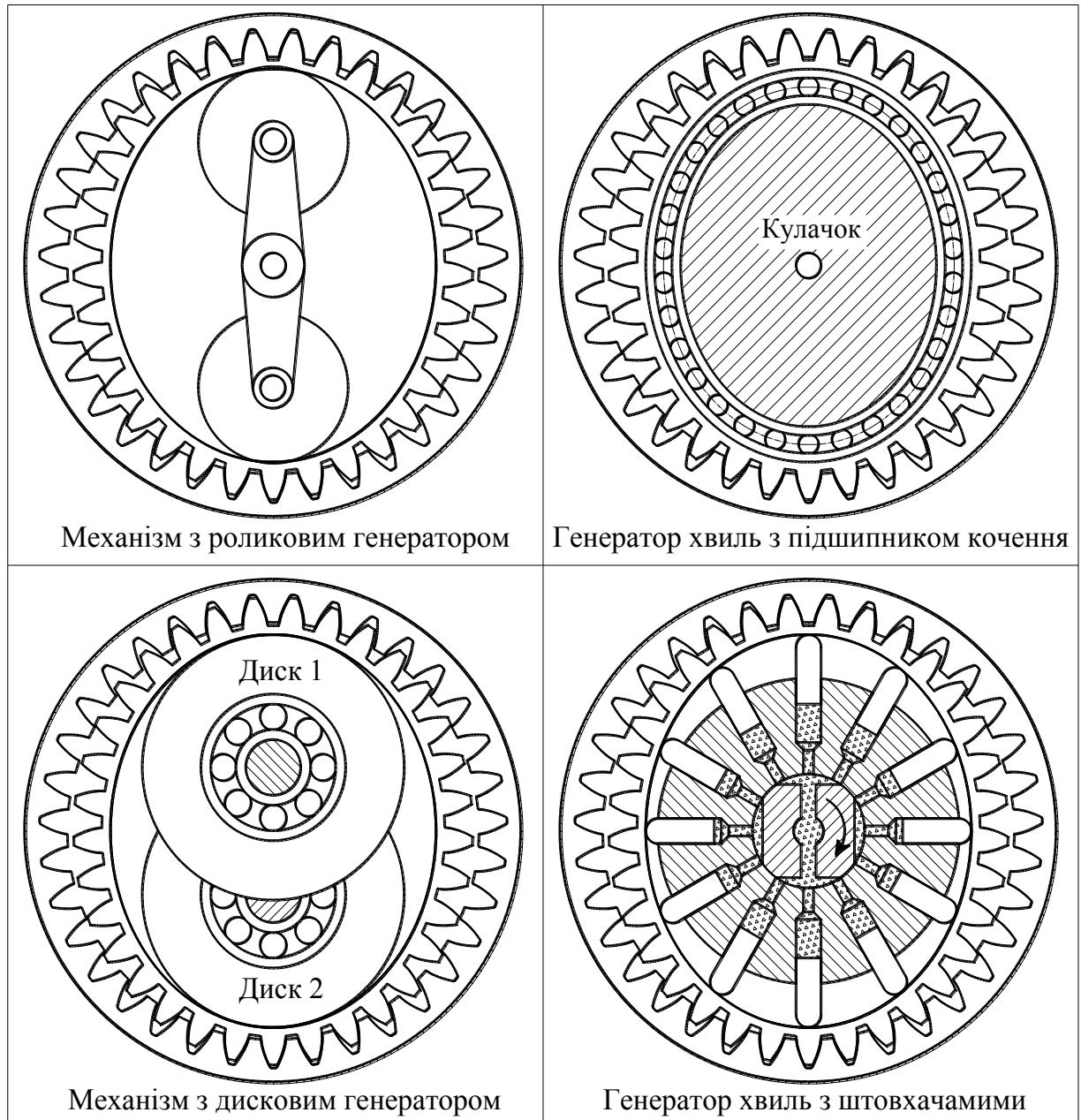


Рис. 3.33. Генератори хвильових передач

На рис. 3.33 наведені конструктивні схеми генераторів.

Застосовуються зубчасті хвильові передачі із закріпленим гнучким або жорстким колесами. У випадку, коли закріплене гнучке колесо, напрямки обертання генератора та вихідного валу збігаються, а якщо закріпити жорст-

ке колесо (найбільш поширений випадок), то напрямки швидкостей генератора і гнучкого колеса будуть протилежними.

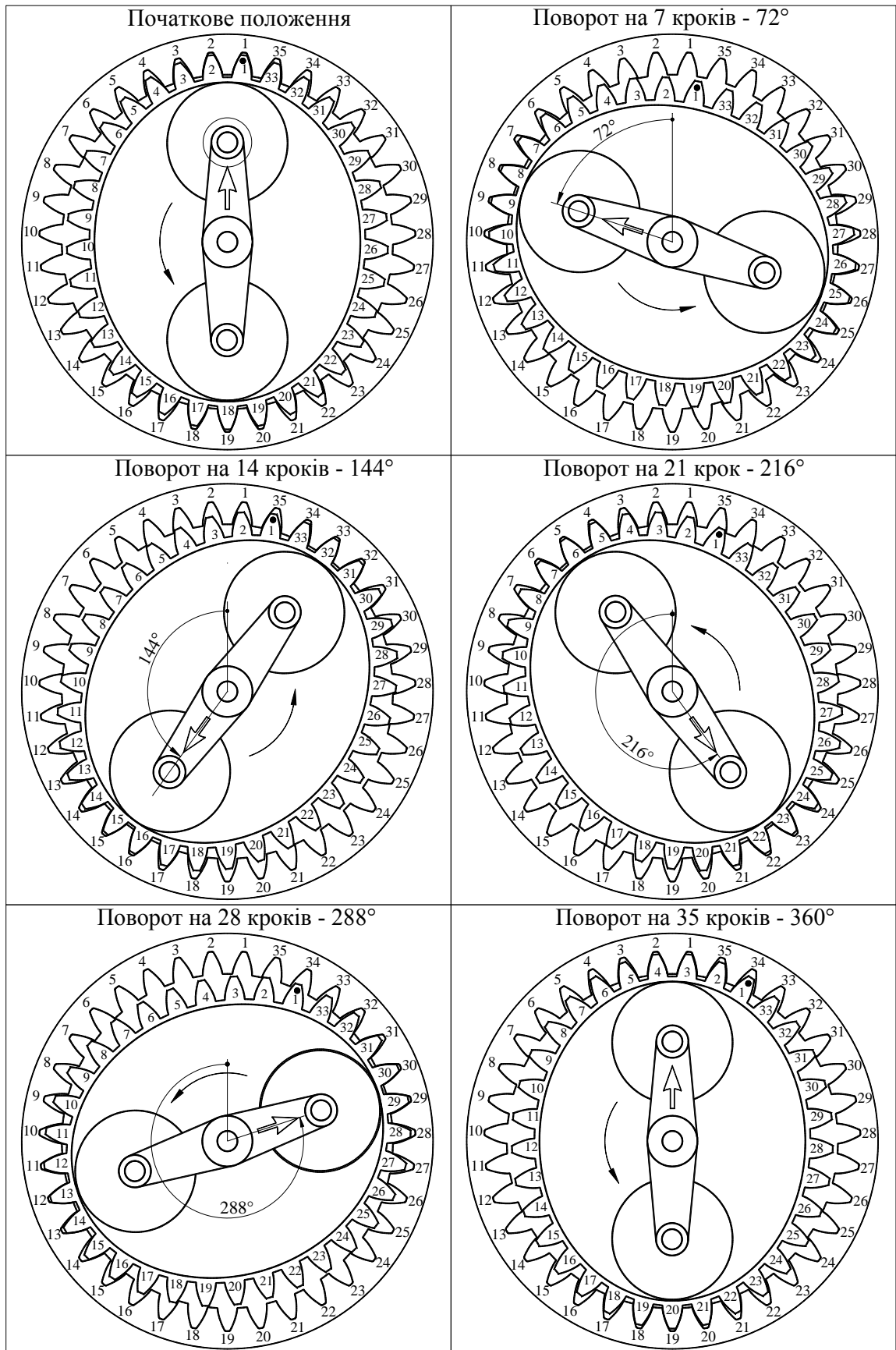


Рис. 3.34. Рух генератора і гнучкого колеса відносно жорсткого колеса

Одна з головних особливостей хвильової передачі – можливість отримання високого передатного числа в одному ступені. Хвильові редуктори мають передатні числа від 60 до 320. Внаслідок малої різниці діаметрів гнучкого і жорсткого коліс та гнучкості одного з елементів у зачепленні бере участь одночасно від 10 до 50% всіх зубців, тобто має місце багатопарність зачеплення, що дозволяє застосовувати колеса з малим модулем зачеплення (зазвичай 1-2 мм). Хвильові передачі можуть передавати крутний момент у кілька разів більший ніж інші зубчасті передачі з тими ж габаритами і масою, вони значно компактніші зубчастих передач інших видів з тією ж здатністю до сприйняття навантажень. Хвильові передачі відрізняється м'якістю, малою шумністю, підвищеною кінематичною точністю, що дозволяє створювати безлюфтові зачеплення. Хвильова передача зазвичай працює як редуктор. Гнучкі колеса хвильових передач зазвичай виготовляють з металу з високою межею витривалості. Хвильові передачі застосовуються в різних галузях техніки: у приводах вантажопідйомних машин, конвеєрів, різних верстатів, в авіаційній та космічній техніці, у точних приладах, виконавчих механізмах систем з дистанційним та автоматичним керуванням.

Герметичні хвильові передачі передають обертання в герметизовані порожнини. Передачі можуть працювати як редуктор (ККД 80-90%) і мультиплікатор (ККД 60-70%). У першому випадку ведучою ланкою є генератор хвиль, а у другому – вал гнучкого чи жорсткого колеса.

Розглянемо кінематику хвильової передачі. Для цього попередньо покажемо кілька взаємних положень генератора і гнучкого колеса відносно жорсткого нерухомого колеса (рис. 3.34). Ця модель двоххвильової передачі має $z_{ж} = 35$ та $z_{г} = 33$. На гнучкому колесі пронумеровані зубці, а на жорсткому – западини. На генераторі є стрілка, яка вказує на той ролик, положення якого будемо відслідковувати через кожні 72° повороту генератора. Відмічаємо, що постійно зубець гнучкого колеса потрапляє у западину жорсткого з тим же номером. Наприкінці оберту зубець гнучкого колеса з номером 33 заходить у западину жорсткого з таким же номером, а зубці з номерами 1 і 2 – у западини з номерами 34 і 35 відповідно. В результаті гнучке колесо за один оберт генератора повернулось на 2 зубця ($z_{ж} - z_{г}$) за годинниковою стрілкою. Тоді передатне відношення від генератора до гнучкого колеса буде визначатись залежністю

$$i_{г-г}^{(ж)} = -\frac{z_{г}}{z_{ж} - z_{г}}. \quad (3.52)$$

Якщо закріпити гнучке колесо, що застосовується при передачі руху через герметичну стінку, тоді передатне відношення від генератора до жорсткого колеса буде

$$i_{Г-Ж}^{(Г)} = \frac{z_{Ж}}{z_{Ж} - z_{Г}} \quad (3.53)$$

Переваги хвильової передачі:

1) Велике передатне відношення при малій кількості деталей ($i = 80 \div 320$). Менше значення допустимого передатного відношення пов'язане з деформацією гнучкого колеса.

2) Кращі масо-габаритні характеристики порівняно зі звичайними зубчастими передачами.

3) Висока кінематична точність (в зачепленні одночасно знаходиться багато пар зубців) та плавність ходу.

4) Можливість передачі моменту через герметичні стінки.

Недоліки хвильової передачі:

1) Висока напруженість основних елементів гнучкого колеса та генератора хвиль.

2) Знижена крутильна жорсткість.

3.7. Питання для самопідготовки за розділом

1. Яке призначення механізму передачі?
2. Які передачі називаються одноступінчастими, а які багатоступінчастими?
3. Що таке передатне відношення?
4. Що означає додатний або від'ємний знак передатного відношення для механізмів із паралельними осями валів?
5. Які механізми називаються редукторами, які прискорювачами, а які коробками зміни передач?
6. Чим відрізняється поняття «передатне число» від поняття «передатне відношення»?
7. Які види передач Вам відомі?
8. Які переваги мають зубчасті передачі перед іншими видами передач?
9. Яким може бути відносне розташування осей обертання валів у триланкових (одноступінчастих) передачах?

10. Яка відмінність зовнішнього і внутрішнього зачеплень циліндричних зубчастих коліс?
11. Яке призначення некруглих циліндричних зубчастих коліс?
12. Яку форму можуть мати зубчасті колеса при паралельному розташуванні валів триланкової передачі?
13. Які зубчасті колеса застосовуються в передачах із осями валів, що перетинаються?
14. Чому переважно застосовуються конічні зубчасті передачі з прямим кутом перетинання геометричних осей валів?
15. Як визначити передатне відношення конічного зачеплення через кути початкових конусів коліс?
16. Яку форму можуть мати зубчасті колеса при перехресних геометричних осях їхніх валів?
17. Яка зубчаста передача називається гвинтовою?
18. Яка зубчаста передача називається гіпоїдною?
19. Які різновиди черв'ячних передач Ви знаєте?
20. Що таке число заходів черв'яка? Як воно впливає на передатне відношення черв'ячної передачі?
21. Чим обумовлене застосування багатоступінчастих передач?
22. Які різновиди багатоступінчастих зубчастих передач Вам відомі?
23. Які передачі називаються планетарними?
24. Які зубчасті колеса називаються паразитними?
25. Яке призначення паразитних зубчастих коліс?
26. Як визначити передатне відношення багатоступінчастої передачі?
27. Яке зубчасте колесо називається ведучим?
28. Яке зубчасте колесо називається веденим?
29. Як впливає ККД (коефіцієнт корисної дії) передачі на величину вихідного обертового моменту сил?
30. Як визначити вихідний обертовий момент сил за вхідним?
31. Що таке реактивний момент сил передачі? Як його можна визначити?
32. Які найпростіші схеми планетарних передач Ви знаєте?
33. Які основні переваги планетарних передач у порівнянні з не планетарними?
34. Які кінематичні можливості мають планетарні передачі?
35. Яка планетарна передача називається диференціальною?
36. Сформулюйте метод уявної зупинки водила (метод Вілліса).
37. Яка планетарна передача називається оберненою?

38. Як визначити передатне відношення оберненої планетарної передачі?
39. Як визначити відносні кутові швидкості зубчастих коліс планетарної передачі відносно водила?
40. Як визначити графічно передатне відношення циліндричної планетарної передачі?
41. Як визначити графічно передатне відношення конічної планетарної передачі?
42. Чим відрізняється несиметричний диференціал від симетричного?
43. Яке призначення міжколісного диференціала колісної машини?
44. Які режими руху може мати міжколісний диференціал?
45. У чому полягає кінематичний синтез планетарних передач?
46. У чому полягає умова співвісності планетарної передачі?
47. У чому полягає умова сусідства планетарної передачі?
48. У чому полягає умова зборки планетарної передачі?
49. Чому сателіти планетарної передачі необхідно розташовувати під рівними кутами?
50. В чому полягає умова не заклинювання пари коліс внутрішнього зачеплення?
51. Що таке хвильова передача?
52. З яких ланок складається хвильова передача?
53. Як визначити передатне відношення хвильової передачі?
54. Які бувають конструкції генераторів хвильових передач?
55. Які переваги і недоліки хвильових передач?
56. Який діапазон переданих відношень мають хвильові передачі?

Розділ 4. ТЕОРІЯ ЗУБЧАСТОГО ЗАЧЕПЛЕННЯ

Для нормальної роботи пари зубчастих коліс кожна наступна пара зубців повинна входити в зачеплення, перш ніж попередня пара вийде із зачеплення. Таким чином, повинні мати місце моменти двопарного зачеплення, й при цьому обидві пари зубців повинні забезпечувати однакові передатні відношення. Профілі зубців, що забезпечують необхідне передатне відношення, називаються спряженими, і це стосується не тільки круглих, але й не круглих коліс.

4.1. Основна теорема зачеплення

На рис. 4.1 зображено два профіля із центрами обертання в точках O_1 і O_2 , що дотикаються один одного в точці k . Лінія nn – це нормаль до профілів у точці їх дотику, що перетинає лінію центрів O_1O_2 у точці P .

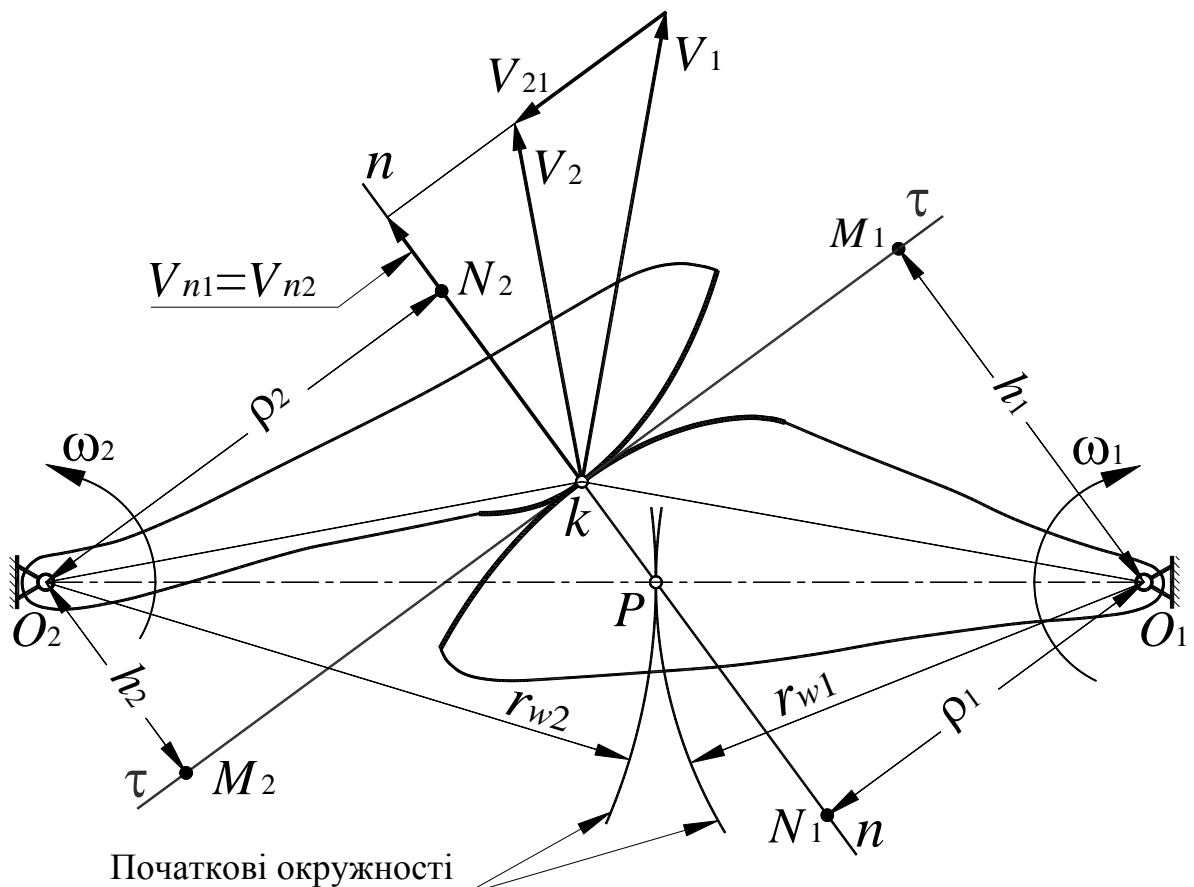


Рис. 4.1. До основного закону зачеплення

Теорема. Загальна нормаль до профілів mn ділить лінію центрів O_1O_2 на відрізки у зворотно пропорційному відношенні до кутових швидкостей ω_1 і ω_2 , тобто

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P}. \quad (4.1)$$

Розглянемо доведення цієї теореми.

Будемо вважати, що ланка 1 є ведучою й швидкість ω_1 є заданою, тоді швидкість точки k цієї ланки буде рівна

$$V_{k_1} = V_1 = \omega_1 \cdot O_1k. \quad (4.2)$$

Запишемо векторне рівняння для визначення швидкості точки k ланки 2, розглянувши її в складному русі. У цьому випадку швидкість V_{k_1} буде переносною швидкістю для точки k_2 , а відносна швидкість $V_{k_2k_1}$ буде спрямована вздовж дотичної $\tau\tau$.

Для зручності позначимо $V_{k_2} = V_2$ і $V_{k_2k_1} = V_{21}$, тоді

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{V}_{21}, \quad (4.3)$$

де $\vec{V}_2 \perp O_2k$; $\vec{V}_1 \perp O_1k$; $\vec{V}_{21} \parallel \tau\tau$.

За векторним рівнянням (4.3) з урахуванням вказаних напрямків знаходимо V_2 і V_{21} . Відзначимо, що відносна швидкість V_{21} – це швидкість ковзання профілів. З виконаних побудов бачимо, що проєкції векторів \vec{V}_1 і \vec{V}_2 на нормаль mn однакові, тобто $V_{n_1} = V_{n_2}$. Знайдемо значення цих векторів. З курсу «Теоретична механіка» відомо, що проєкція швидкості точки прямої (наприклад, прямої mn) на цю пряму дорівнює добутку кутової швидкості на відстань від центру обертання до цієї прямої (див. рис. 4.2).

Щоб дистанція між точками A , B і C на лінії mn залишалась постійною, повинна виконуватись умова $V_{A_n} = V_{B_n} = V_{C_n} = V_C = \omega \cdot h$. Тоді

$$\begin{aligned} V_{n_1} &= \omega_1 \cdot \rho_1, \\ V_{n_2} &= \omega_2 \cdot \rho_2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Оскільки $V_{n_1} = V_{n_2}$, тоді $\omega_1 \cdot \rho_1 = \omega_2 \cdot \rho_2$, звідки маємо

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (4.5)$$

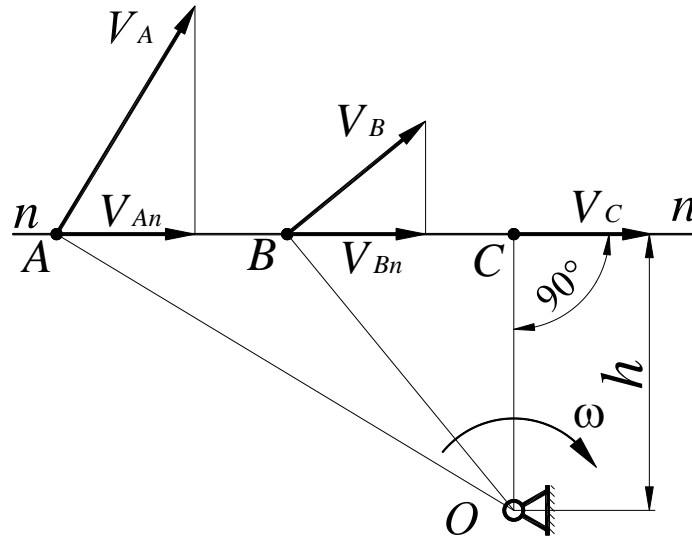


Рис. 4.2. До визначення проєкції швидкості точки на пряму nn

З подібності трикутників ΔO_1N_1P і ΔO_2N_2P можна записати пропорцію $\frac{O_2P}{O_1P} = \frac{O_2N_2}{O_1N_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, тоді після підстановки в (4.5) отримаємо

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P}. \quad (4.6)$$

Теорема доведена.

Із виразу (4.6) випливає, що $\omega_1 \cdot O_1P = \omega_2 \cdot O_2P$. Оскільки $\omega_1 \cdot O_1P = V_{P_1}$ і $\omega_2 \cdot O_2P = V_{P_2}$, тоді $V_{P_1} = V_{P_2}$. Висновок: точка P є миттєвим центром швидкостей у відносному русі ланок 1 і 2. У ТММ ця точка називається полюсом зачеплення. Для круглих коліс

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} = \text{const}. \quad (4.7)$$

З виразу (4.7) випливає наступне: *профілі зубців круглих коліс будуть спряженими, якщо при будь-якому їхньому взаємному положенні, загальна нормаль до профілів буде перетинати лінію центрів в одній і тій же точці P .*

В принципі для довільно взятого профілю (є деякі обмеження) можна побудувати спряжений йому профіль. Однак у якості профілів зубців коліс застосовується досить обмежене число кривих. Найбільшого поширення набуло евольвентне зачеплення, що має низку технологічних та експлуатаційних переваг.

Зауважимо, що сліди точки P на площинах ланок 1 і 2 – це центроїди у відносному їх русі. Для круглих коліс – це окружності, які отримали назву *початкових окружностей* (ПО).

Примітка: при розгляді цього питання необхідно було визначати V_{n_1} і V_{n_2} . В подальшому, при розгляді питання коефіцієнтів ковзання зубців, необхідно буде знаходити V_{τ_1} і V_{τ_2} . Рационально це зробити зараз скориставшись рис. 4.1.

$$\begin{aligned} V_{\tau_1} &= \omega_1 \cdot h_1 = \omega_1 \cdot kN_1, \\ V_{\tau_2} &= \omega_2 \cdot h_2 = \omega_2 \cdot kN_2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Тут h_1 і h_2 відповідно відстані до дотичної $\tau\tau$ від центрів обертання O_1 і O_2 .

4.2. Евольвента та евольвентне зачеплення

а). Евольвента окружності та її властивості

Евольвентою називається слід точки прямої (утворююча пряма) при перекочуванні її без ковзання по окружності (основна окружність).

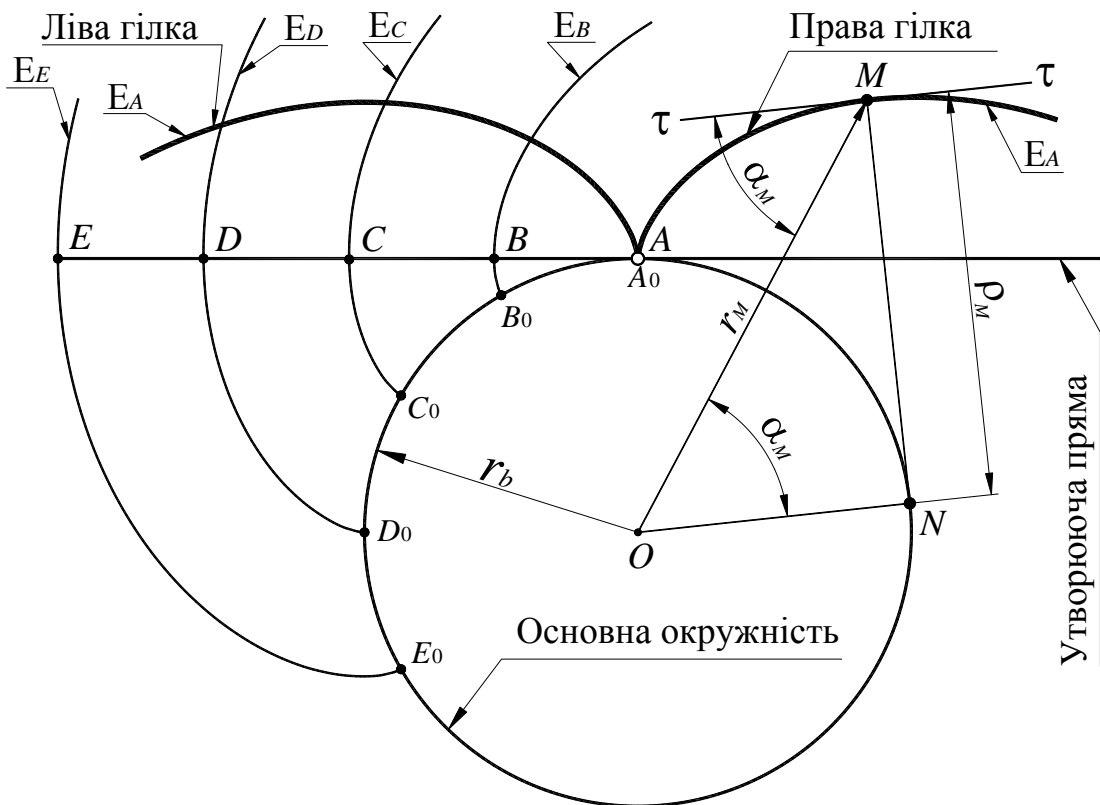


Рис. 4.3. Евольвента окружності

На рис. 4.3 утворююча пряма (УП) перекочується без ковзання по основній окружності (ОО) радіуса r_b . При перекочуванні УП по ОО за годинниковою стрілкою точки прямої B , C , D і E відповідно утворюють евольвенти

E_B, E_C, E_D, E_E . Точка A цієї ж прямої при перекочуванні її за годинниковою стрілкою утворює праву гілку евольвенти E_A (показана жирною лінією справа), а при перекочуванні УП проти годинникової стрілки, точка A утворює ліву гілку евольвенти E_A (показана жирною лінією зліва). Таким чином, розрізняють ліву та праву гілки евольвенти.

Основні властивості евольвенти:

1) евольвента розташовується поза основною окружністю;
2) евольвенти E_B, E_C, E_D, E_E є еквідистантними кривими (однієї й тієї ж гілки);

3) для евольвент E_B, E_C, E_D і E_E точка $A \equiv A_0$ є центром кривизни цих евольвент відповідно в точках B, C, D і E , а відрізки AB, AC, AD, AE – радіуси кривизни. Радіус кривизни евольвенти E_A у точці A дорівнює нулю ($\rho_A = 0$);

4) нормаль до евольвенти є дотичною до основної окружності;

5) за визначенням евольвенти мають місце наступні рівності: дуга A_0B_0 дорівнює відрізку AB , дуга A_0C_0 дорівнює відрізку AC і т. д.;

б) для точки M евольвенти E_A кут α_M – це профільний кут евольвенти E_A в точці M (кут між дотичною τ і радіус-вектором r_M), ρ_M – радіус кривизни евольвенти в точці M , а точка N – центр кривизни. У початковій точці евольвенти (точка A) $\rho_A = 0$, а $\alpha_A = \alpha_b = 0$;

7) з пункту б) випливає: якщо $r_M \rightarrow \infty$, то профільний кут евольвенти $\alpha_M \rightarrow 90^\circ$, а радіус кривизни евольвенти $\rho_M \rightarrow \infty$.

б). Рівняння евольвенти

Визначимо рівняння евольвенти в полярній системі координат. На рис. 4.4 точка A_y – довільна точка евольвенти, положення якої визначається величиною радіуса r_y та кутом його повороту від початкового положення θ_y .

З прямокутного трикутника ΔOBA_y знаходимо, що

$$r_y = r_b / \cos \alpha_y. \quad (4.9)$$

За аналогією

$$\begin{aligned} r &= r_b \cdot \cos \alpha; \\ r_w &= r_b \cdot \cos \alpha_w; \\ r_a &= r_b \cdot \cos \alpha_a. \end{aligned} \quad (4.10)$$

З властивостей евольвенти дуга AB дорівнює відрізку BA_y , тоді

$$r_b \cdot (\theta_y + \alpha_y) = r_b \cdot \tan \alpha_y, \quad (4.11)$$

звідки

$$\theta_y = \operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y = \operatorname{inv} \alpha_y. \quad (4.12)$$

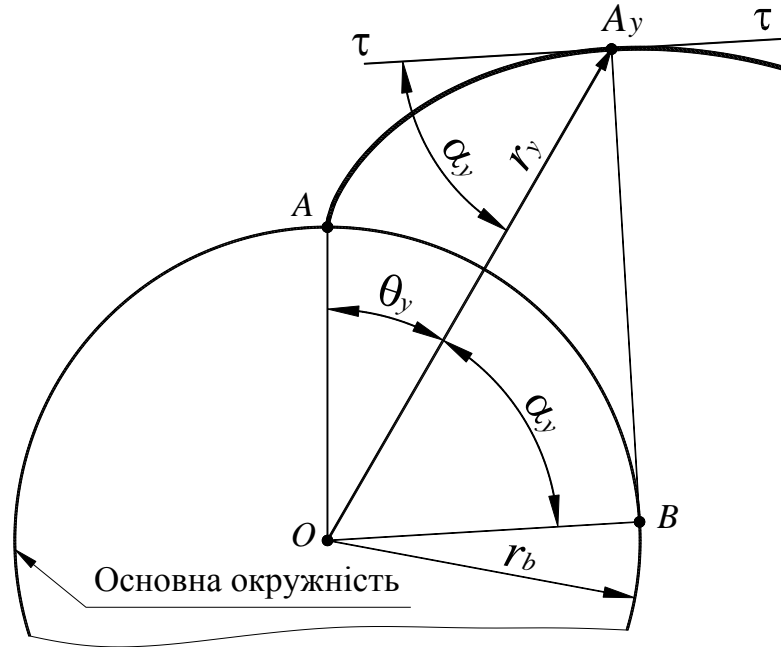


Рис. 4.4. До виведення рівняння евольвенти

Нагадаємо, що відрізок BA_y – це радіус кривизни евольвенти в точці A_y , тобто $\rho = BA_y = r_b \cdot \tan \alpha_y$ і якщо, наприклад, $\theta_y = 2\pi$ (один оберт утворюючої прямої), то $\rho = 2\pi \cdot r_b$ (довжина основної окружності).

в). Евольвентне зачеплення

Нехай дані евольвенти E_1 і E_2 основних окружностей OO_1 і OO_2 , що дотикаються в точці k (рис. 4.5). Радіуси основних окружностей відповідно r_{b_1} і r_{b_2} .

Доведемо, що E_1 і E_2 є спряженими кривими, тобто виконується наступна умова для профілів круглих коліс: $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} = \text{const}$ (з основного закону зачеплення). Проведемо загальну нормаль nn до E_1 і E_2 у точці k . Нагадаємо, що якщо загальна точка кривих – це точка дотику, то в цій точці вони мають загальну дотичну і загальну нормаль, в іншому випадку маємо точку перетину, відповідно і загальної нормалі, і загальної дотичної не буде.

Лінія nn як нормаль до E_1 торкається OO_1 , а як нормаль до E_2 торкається OO_2 . Тобто nn торкається одночасно обох основних окружностей, положення яких незмінне. Це означає, що nn буде перетинати лінію центрів O_1O_2 в одній і тій же точці P , тобто виконується умова спряженості профілів.

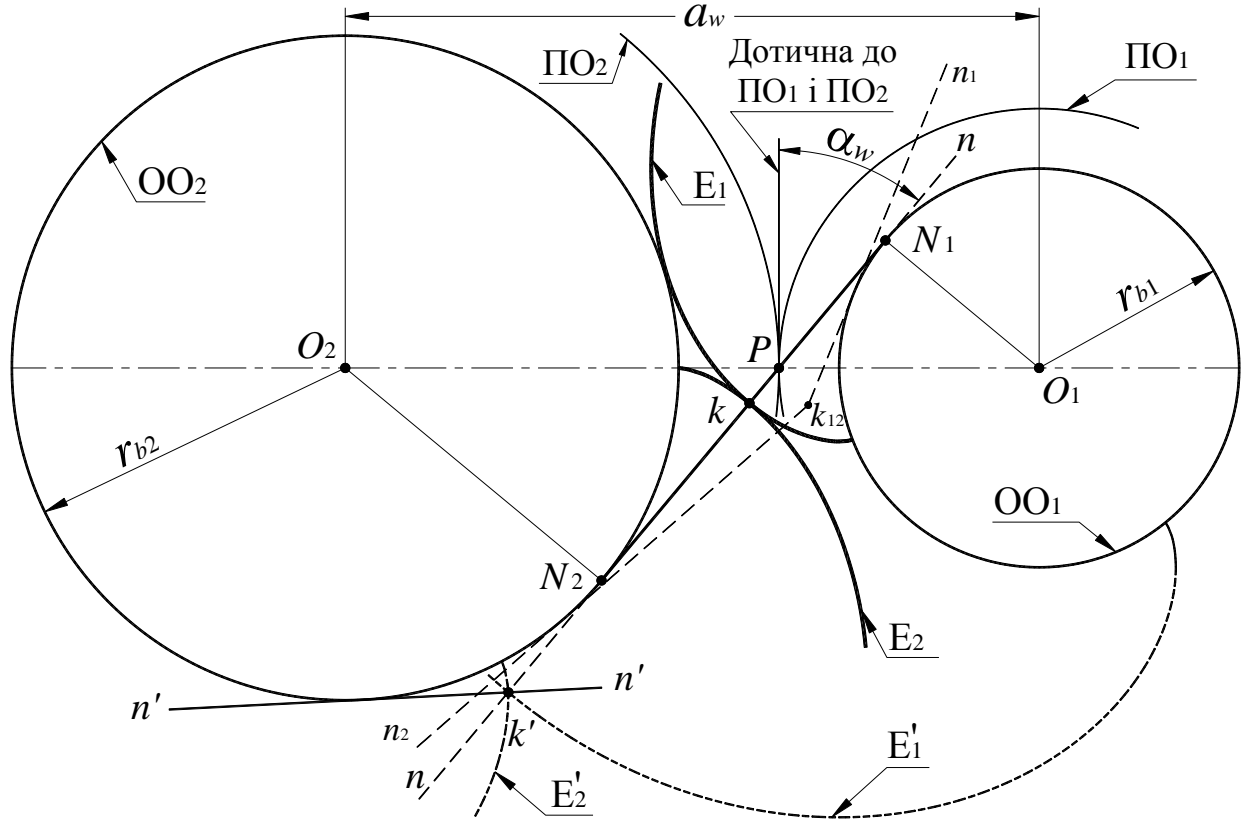


Рис. 4.5. Евольвентне зачеплення

Лінія зачеплення (ЛЗ) – геометричне місце контакту профілів. Покажемо, що для евольвентного зачеплення ЛЗ – це пряма лінія співпадаюча із загальною нормаллю nn .

Припустимо, що точкою взаємодії профілів E_1 і E_2 є точка поза лінією nn , а саме точка k_{12} . У цій точці для E_1 нормаллю буде лінія $k_{12}n_1$, а для E_2 нормаллю буде лінія $k_{12}n_2$. Висновок: поза лінією nn E_1 і E_2 торкатися не можуть. Точка k_{12} – це точка перетину евольвент.

Ділянка ЛЗ, яка обмежена точками дотику нормалі nn з OO_1 і OO_2 (точки N_1 і N_2), – це *теоретична ділянка лінії зачеплення*. Точки N_1 і N_2 – це межі теоретичної ділянки ЛЗ.

Покажемо, що евольвенти можуть торкатися тільки в межах теоретичної ділянки лінії зачеплення N_1N_2 . Припустимо, що точкою взаємодії евольвент є точка k' , яка належить лінії nn , але виходить за межі границі N_2 . На рис. 4.5 пунктирними лініями показані нові положення евольвент після від-

повідного повороту – це евольвенти E_1' і E_2' . З рисунка видно, що для E_1' як і раніше нормаллю залишається лінія mn , а для E_2' нормаллю є лінія $n'n'$. Тобто в точці k' евольвенти E_1' і E_2' не мають загальної нормалі і загальної дотичної.

Висновок: за межами теоретичної ділянки лінії зачеплення N_1N_2 евольвенти не торкаються, а перетинаються – відбувається інтерференція (накладення) евольвентних профілів.

Введемо поняття кута зачеплення α_w . Кут зачеплення – це кут між ЛЗ і загальною дотичною до початкових окружностей PO_1 і PO_2 (дотик початкових окружностей спостерігається у полюсі зачеплення – у точці P). Сила взаємодії профілів завжди спрямована вздовж ЛЗ, положення якої не змінюється. Вказане означає, що в процесі зачеплення сила взаємодії зберігає свій напрямок, і це є важливою позитивною властивістю евольвентного зачеплення.

Важливою якістю евольвентного зачеплення є також те, що при зміні міжосьової відстані a_w зачеплення зберігає свою працездатність.

При зміні a_w змінюється кут зачеплення α_w , відповідно змінюються й відрізки $O_1P = r_{w1}$ і $O_2P = r_{w2}$, але передатне відношення залишається без зміни

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} = \frac{O_2P \cdot \cos \alpha_w}{O_1P \cdot \cos \alpha_w} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} = \text{const},$$

оскільки радіуси основних окружностей r_{b1} і r_{b2} не змінюються.

г). Теоретичний вихідний і виробляючий контури

Теоретичний вихідний контур (звичайна зубчаста рейка) – це сектор зубчастого колеса, у якого розміри всіх радіусів наближаються до нескінченності. Якщо радіус основної окружності $r_b \rightarrow \infty$, то радіус кривизни евольвенти так само $\rho = r_b \cdot \text{tg} \alpha \rightarrow \infty$, тобто евольвента перетворюється на пряму лінію (рис.4.6).

Виробляючий контур (інструментальна рейка для нарізування зубчастих коліс) на відміну від теоретичного контуру доповнений заштрихованими ділянками.

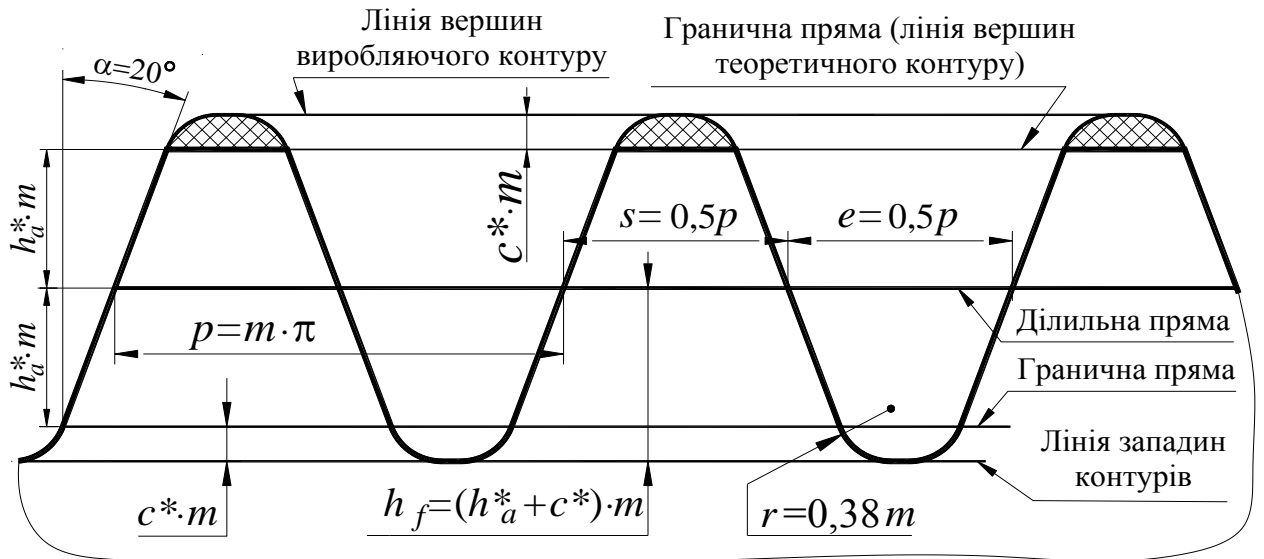


Рис. 4.6. Теоретичний вихідний і виробляючий контури

На рис. 4.6 прийнято наступні позначення:

ДП – пряма лінія, по якій товщина зубця дорівнює ширині западини рейки, тобто $s = e = 0,5p$;

$p = m \cdot \pi$ – крок рейки – відстань між однойменними точками двох сусідніх зубців виміряна вздовж ДП. Оскільки однойменні профілі є паралельними прямими, то по будь-якій іншій прямій крок рейки не змінюється;

ГП – граничні прямі – це прямі лінії, між якими профіль зубця окреслений прямою лінією і є евольвентою;

$h_a^* \cdot m$ – висота голівки зубця, де $h_a^* = 1,0$ – коефіцієнт висоти голівки зубця;

$h_f^* \cdot m = h_a^* \cdot m + c^* \cdot m$ – висота ніжки зубця;

$c^* \cdot m$ – радіальний зазор, де $c^* = 0,25$ – коефіцієнт радіального зазору;

$r = 0,38 \cdot m$ – радіус сполучення прямолінійної частини профілю зубця (евольвенти) з лінією западин обох контурів, а також з лінією вершин виробляючого контуру (рис. 4.7).

З рис. 4.7 $r = OB = OC + BC = OC + c^* \cdot m$.

Із трикутника ΔOAC знаходимо $OC = OA \cdot \sin \alpha = r \cdot \sin \alpha$, відповідно $r = r \cdot \sin \alpha + c^* \cdot m$; $r - r \cdot \sin \alpha = c^* \cdot m$; $r \cdot (1 - \sin \alpha) = c^* \cdot m$, звідки радіус сполучення буде рівний

$$r = \frac{c^* \cdot m}{1 - \sin \alpha} = \frac{0,25m}{1 - \sin 20^\circ} = \frac{0,25m}{1 - 0,342} = 0,38m.$$

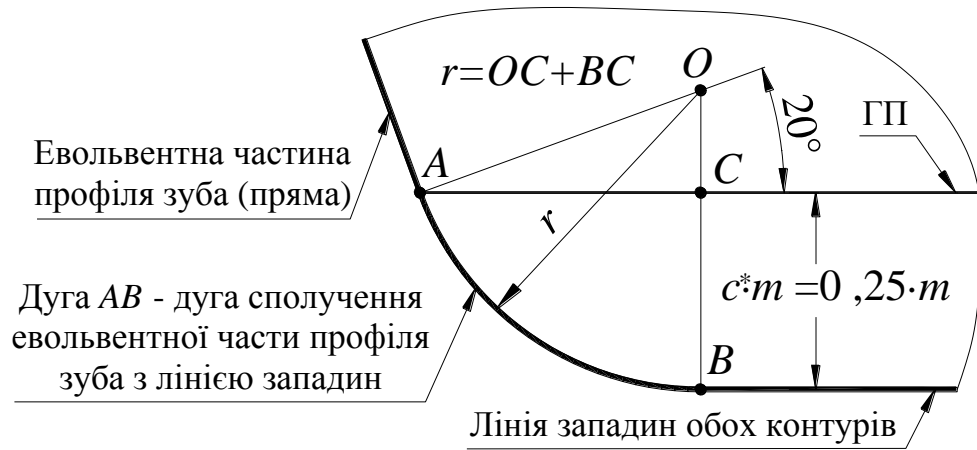


Рис. 4.7. Галтель

д). Геометричні параметри евольвентного зубчастого колеса

В сучасному машинобудуванні в переважній більшості застосовуються евольвентні зубчасті колеса, які володіють рядом технологічних і експлуатаційних переваг. У свій час евольвента в якості профілю зубця була запропонована ще Леонардом Ейлером. Евольвента, як було раніше відзначено, є слід будь-якої точки прямої при перекочуванні її по окружності. Надалі таку окружність будемо називати основною. На рис. 4.8 показане зубчасте колесо із зазначенням геометричних параметрів.

Довжина ділильної окружності

$$L_{\text{до}} = p \cdot z = \pi \cdot d. \quad (4.13)$$

З (4.13) один з головних параметрів зубчастого колеса – діаметр d ділильної окружності рівний

$$d = z \cdot \frac{p}{\pi}. \quad (4.14)$$

З (4.14) видно, що якщо стандартизувати крок p (прийняти зручні значення), то враховуючи значення числа π , діаметр d виражався б нескінченним десятковим дробом, що незручно, тому був стандартизований не крок, а відношення p/π , яке названо модулем зубчастого колеса, що вимірюється в міліметрах. Отже, модуль зубчастого колеса рівний

$$m = \frac{p}{\pi}. \quad (4.15)$$

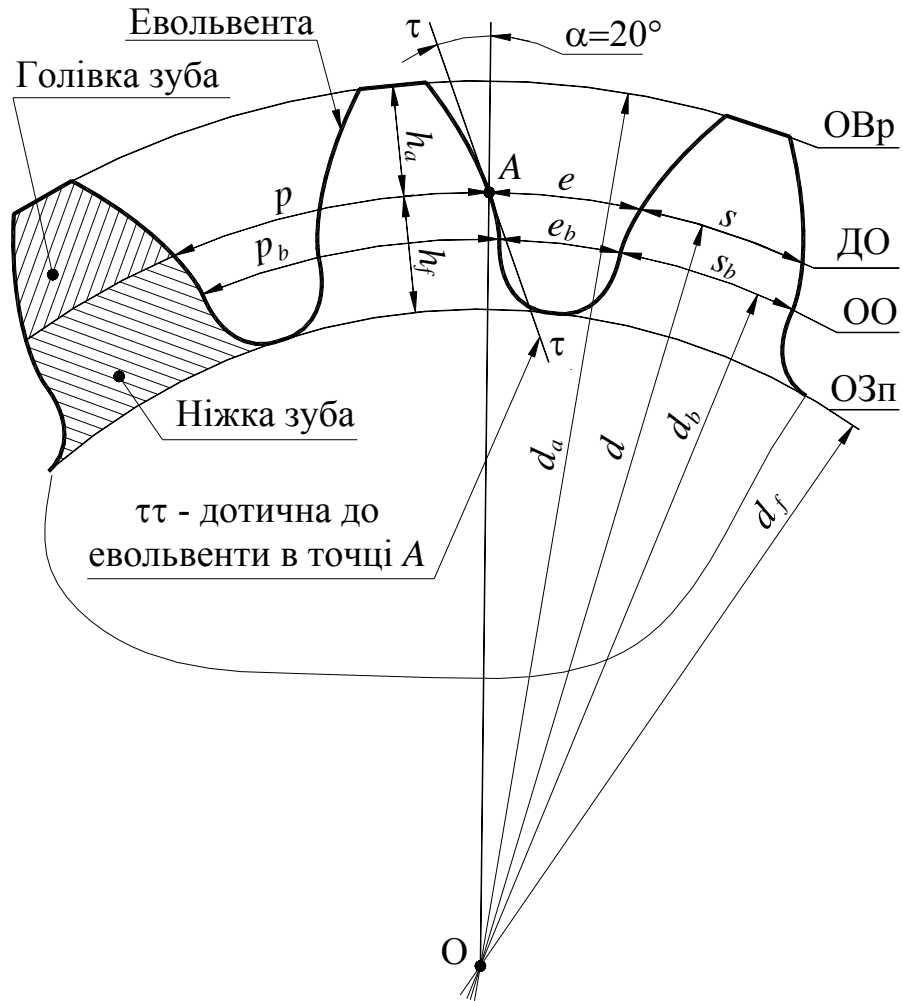


Рис. 4.8. Геометричні параметри зубчастого колеса

На рис. 4.8 прийнято наступні позначення:

ДО – ділительна окружність – це окружність, по якій крок p стандартний, а профільний кут евольвенти $\alpha = 20^\circ$. ДО ділить зубець на голівку й ніжку;

p – крок зубчастого колеса (відстань між однойменними точками двох сусідніх зубців виміряна вздовж ДО, тобто це довжина дуги вздовж ДО);

p_b – крок зубчастого колеса вздовж ОО:

s – товщина зубця вздовж ДО;

e – ширина западини вздовж ДО;

ОВр – окружність вершин;

ОЗп – окружність западин;

ОО – основна окружність;

h_a – висота голівки зубця;

h_f – висота ніжки зубця.

Прийнято всі параметри зубчастого колеса виражати в частках модуля. Так з вище наведеного можна записати $p = m \cdot \pi$, $d = m \cdot z$.

Висота голівки зубця

$$h_a = h_a^* \cdot m, \quad (4.16)$$

де $h_a^* = 1,0$ – коефіцієнт висоти голівки зубця.

Висота ніжки зубця

$$h_f = m \cdot (h_a^* + c^*), \quad (4.17)$$

де $c^* = 0,25$ – коефіцієнт радіального зазору.

Діаметр окружності вершин рівний $d_a = d + 2h_a$. Тоді з урахуванням викладеного одержимо

$$d_a = m \cdot (z + 2h_a^*) = m \cdot (z + 2). \quad (4.18)$$

Аналогічно діаметр окружності западин рівний $d_f = d - 2h_f$. З урахуванням значення висоти ніжки зубця одержимо

$$d_f = m \cdot (z - 2h_a^* - 2c^*) = m \cdot (z - 2,5). \quad (4.19)$$

Для нульових коліс (виготовлених без зсуву, тобто при $x=0$) товщина зубця й ширина западини дорівнюють половині кроку p , відповідно маємо

$$s = e = 0,5p = 0,5m \cdot \pi. \quad (4.20)$$

Стандартом передбачені наступні індекси для позначення параметрів зубчастого колеса:

a – індекс, передбачений для позначення параметрів ОВр або голівки зубця. Наприклад: d_a , h_a , α_a , s_a , e_a і т. д.

f – індекс, передбачений для позначення параметрів ОЗп або ніжки зубця. Наприклад: d_f , h_f , s_f , e_f і т. д.

b – індекс, передбачений для позначення параметрів ОО. Наприклад: d_b , p_b , α_b , s_b , e_b і т. п.

w – індекс, передбачений для позначення параметрів початкової окружності (ПО). Наприклад: d_w , p_w , α_w , s_w , e_w і т. п.

Початковими окружностями (ПО) називаються окружності пов'язані з колесами, які торкаються одна одної й перекочуються одна по одній без ковзання. Поняття ПО для окремо взятого колеса не існує.

Для позначення параметрів ділильної окружності (ДО) індекси не передбачені. Наприклад: d , h , α , s , e , α і т. д.

е). Робоча ділянка ЛЗ. Активні ділянки профілів зубців

Евольвенти можуть торкатись одна одної тільки в межах теоретичної ділянки лінії зачеплення N_1N_2 . В дійсності практично ніколи евольвенти не контактують на всій ділянці N_1N_2 . Реальна ділянка контакту профілів завжди менше й завжди розташовується в межах теоретичної ділянки ЛЗ. Така ділянка називається робоча ділянка ЛЗ.

Границями робочої ділянки ЛЗ є точки перетинання окружностей $ОВр_1$ і $ОВр_2$ з лінією зачеплення – це точки a і b , тобто робочою ділянкою ЛЗ є відрізок ab (на рис. 4.9 зображений більш жирною лінією). При збільшенні радіусів $ОЗп_1$ і $ОЗп_2$ ця ділянка буде збільшуватися і навпаки, але практично границя a не досягає границі N_1 (границя для меншого колеса), а границя b ніколи не може збігтися з N_2 (границя для більшого колеса).

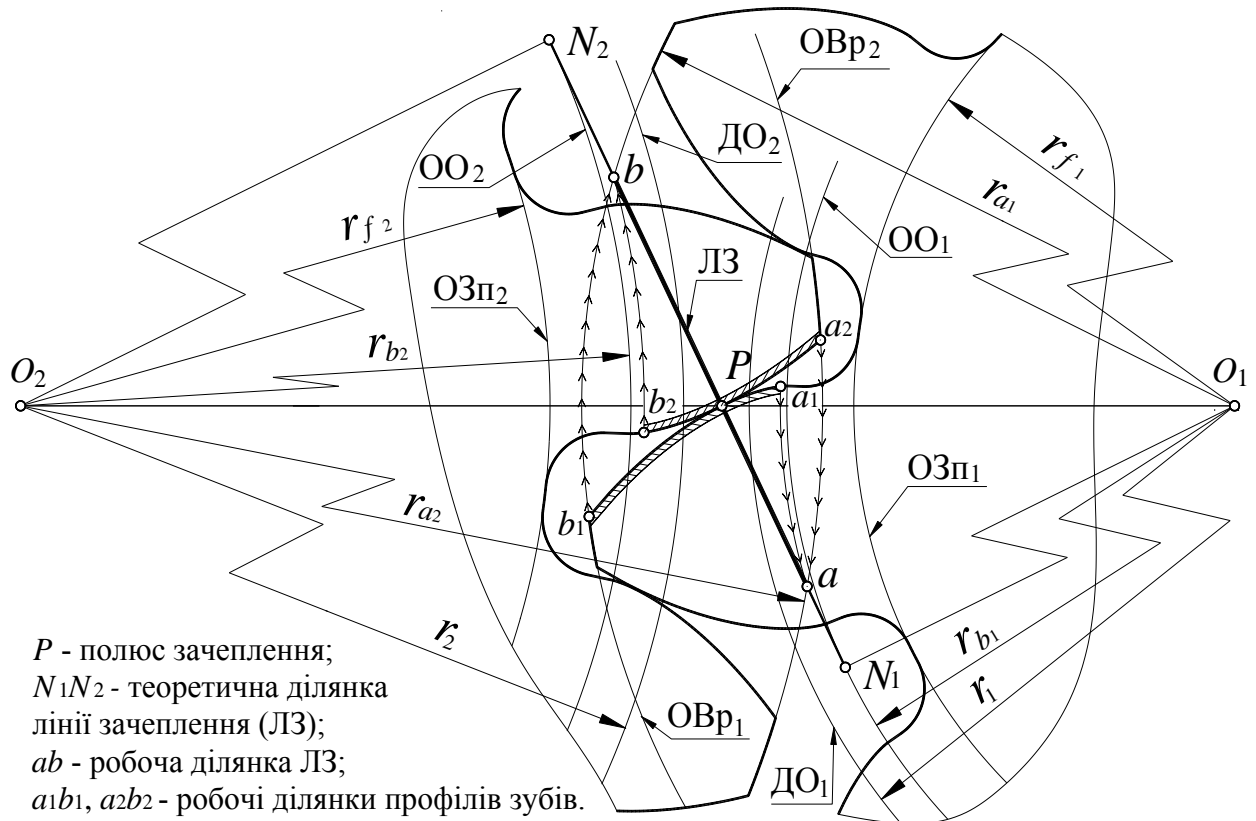


Рис. 4.9. До визначення робочої ділянки лінії зачеплення і активних ділянок профілів

На рис. 4.9 прийнято наступні позначення:

- $ОЗп_1$ і $ОЗп_2$ – окружності западин;
- $ОО_1$ і $ОО_2$ – основні окружності;
- $ДО_1$ і $ДО_2$ – ділильні окружності;
- $ОВр_1$ і $ОВр_2$ – окружності вершин.

Евольвентна частина профілю укладена між основною окружністю й окружністю вершин (при $z \leq 42$, якщо $z > 42$ то $r_f > r_b$). Уся ця частина профілю брала б участь у роботі, якби робочою ділянкою ЛЗ була б теоретична ділянка N_1N_2 , але, як правило, робоча ділянка ЛЗ завжди менше теоретичної, й частина евольвентного профілю не бере участь у роботі. Ця частина профілю розташовується біля основної окружності (початок евольвенти).

Розглянемо визначення активних ділянок профілів. При цьому будемо мати на увазі, що евольвенти торкаються одна одної тільки на ЛЗ. ЛЗ – це місце «зустрічі» точок контакту профілів.

Крайня точка колеса 2, що позначена як a_2 , увійде в контакт з якоюсь точкою профілю зубця колеса 1 у точці a лінії зачеплення (границя робочої ділянки) рухаючись по дузі радіуса $r'' = O_2a$ (на рисунку ця траєкторія позначена стрілками $\rightarrow \rightarrow \rightarrow$). Усі точки колеса 1 рухаються по дугах окружностей із центром у точці O_1 . Радіусом $r' = O_1a$ проводимо дугу із точки a до перетинання її з профілем зубця колеса 1 і знаходимо початкову точку a_1 активної частини профілю колеса 1. Це ділянка a_1b_1 . Точно так само, розглянувши рух крайньої точки профілю зубця колеса 1 – точки b_1 , знаходимо активну частину профіля зубця колеса 2 a_2b_2 (точка b_1 колеса 1 і точка b_2 увійдуть у контакт у точці b лінії зачеплення по дугах радіусів $r' = O_1b$ і $r'' = O_2b$ відповідно).

ж). Якісні показники евольвентного зачеплення

Якісними показниками евольвентного зачеплення є ковзання евольвентних профілів і коефіцієнт перекриття.

Ковзання евольвентних профілів, коефіцієнти ковзання

У процесі зачеплення профілі перекочуються один по одному й ковзають. Розглянемо взаємодію профілів, показаних на рис. 4.10.

Для розв'язку завдання застосуємо ефективний метод оберненого руху (метод інверсії). Задамо всьому механізм кутову швидкість рівну " $-\omega_1$ ". В результаті нові швидкості ланок будуть рівні

$$\omega'_1 = \omega_1 - \omega_1 = 0;$$

$$\omega'_2 = \omega_2 - (-\omega_1) = \omega'_2 = \omega_2 + \omega_1.$$

Кутові швидкості ω_2 і $(-\omega_1)$ мають однакові напрямки (проти годинникової стрілки) і підсумовуються. Таким чином, колесо 1 зупинилося (нерухо-

мий зубець і нерухома початкова окружність $ПО_1$). По нерухомій $ПО_1$ без ковзання перекочується $ПО_2$ навколо полюса P . У цьому випадку при $V_{k_1} = 0$ отримаємо

$$V_{\text{КОВЗ}} = V_{k_2} = kP \cdot \omega'_2 = kP \cdot (\omega_1 + \omega_2). \quad (4.21)$$

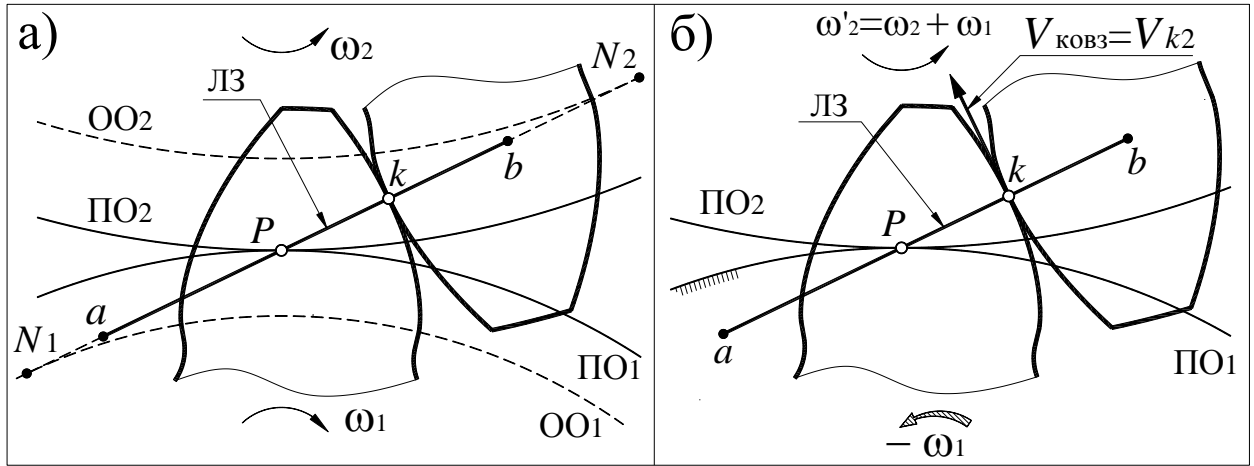


Рис. 4.10. До визначення швидкості ковзання зубців

На рис. 4.10 прийнято наступні позначення:

$ПО_1$ і $ПО_2$ – початкові окружності коліс 1 і 2;

$ОО_1$ і $ОО_2$ – основні окружності коліс 1 і 2;

N_1 і N_2 – границі теоретичної ділянки ЛЗ;

a і b – границі робочої ділянки ЛЗ;

P – полюс зачеплення;

k – точка контакту профілів;

ω_1 , ω_2 – кутові швидкості коліс (до застосування методу інверсії).

Однак $V_{\text{КОВЗ}}$ не повною мірою характеризує зношування тіл тертя. Важливим є наступна обставина: точка тіла може постійно перебувати в зоні тертя, або ж виходити з неї. Тому вводиться поняття коефіцієнту тертя ковзання λ , що є відношенням швидкості ковзання до швидкості V_{τ} , з якою точка даного тіла рухається із зони ковзання, і визначається за залежністю

$$\lambda = V_{\text{КОВЗ}} / V_{\tau}. \quad (4.22)$$

Після перетворень одержимо

$$\lambda'_1 = \frac{kP \cdot (\omega_1 + \omega_2)}{V_{\tau_1}}; \quad (4.23)$$

$$\lambda'_2 = \frac{kP \cdot (\omega_1 + \omega_2)}{V_{\tau_2}}.$$

Питання пошуку величин V_{τ_1} і V_{τ_2} було розглянуто в розділі «Основна теорема зачеплення». З (4.8) маємо

$$\begin{aligned} V_{\tau_1} &= \omega_1 \cdot kN_1; \\ V_{\tau_2} &= \omega_2 \cdot kN_2, \end{aligned} \quad (4.24)$$

де kN_1 і kN_2 – відстані від точки контакту профілів до границь теоретичної ділянки ЛЗ.

Відзначимо, що для евольвентного зачеплення $kN_1 = \rho_1$ і $kN_2 = \rho_2$, де ρ_1 і ρ_2 – відповідно радіуси кривизни евольвент в точці дотику k .

Залежності (4.24) коректні тільки для двох тіл взаємодіючих між собою. У випадку пари зубчастих коліс колесо з меншим числом зубців вступає в роботу в $i_{12} = \omega_1 / \omega_2 = z_2 / z_1$ разів частіше. Відповідно до вказаного виконаємо корегування коефіцієнтів λ'_1 та λ'_2 , в результаті чого отримаємо

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda'_1 \cdot i_{12} = \frac{kP}{kN_1} \cdot \left(1 + \frac{1}{i_{12}}\right) = \frac{kP}{kN_1} \cdot (1 + i_{12}); \\ \lambda_2 &= \lambda'_2 = \frac{kP}{kN_2} \cdot (1 + i_{12}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

З виразу (4.25) випливає, що, коли точка контакту перебуває в полюсі, обидва коефіцієнти будуть дорівнювати нулю, оскільки $kP = 0$, і при переході через полюс швидкість ковзання буде змінювати свій напрямок на протилежний. Відповідно і перед коефіцієнтами також змінюються знаки на протилежні при переході через полюс. При наближенні точки контакту k до границь теоретичної ділянки ЛЗ відстані kN_1 і kN_2 зменшуються, і коефіцієнти збільшуються і, коли точка контакту досягає границі теоретичної ділянки ЛЗ, коефіцієнти будуть наближатись до нескінченності.

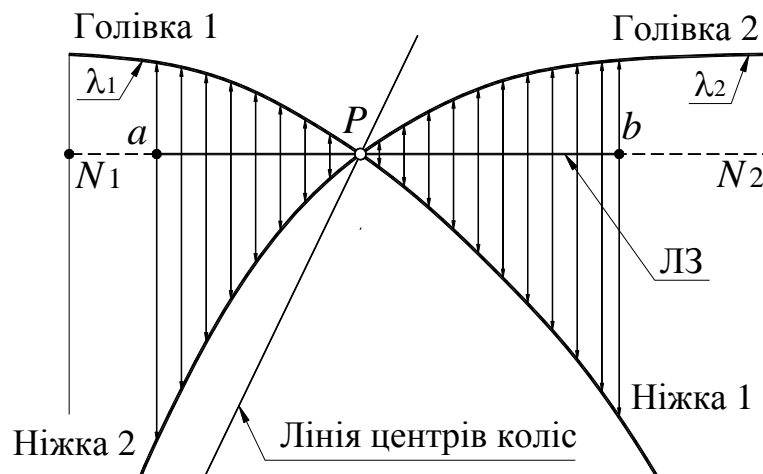


Рис. 4.11. Графіки залежності питомого ковзання від положення точки контакту профілів на лінії зачеплення

Якісна картина залежності коефіцієнтів ковзання в залежності від положення точки контакту профілів на лінії зачеплення показана на рис. 4.11.

Зменшення робочої ділянки лінії зачеплення ab зменшує час перебування зубця в зачепленні (зменшується коефіцієнт перекриття), але при цьому обмежується стрімке зростання коефіцієнтів ковзання і зменшується зношування ніжок зубців.

Коефіцієнт перекриття

Коефіцієнт перекриття показує, скільки в середньому пар зубців одночасно перебувають у зачепленні. У зачепленні може перебувати або одна, або дві пари зубців, а коефіцієнт перекриття завжди має бути більше одиниці.

Можна дати наступні два визначення коефіцієнта перекриття.

1) Коефіцієнт перекриття – це відношення кута повороту зубця за час знаходження його в зачепленні до кутового кроку колеса $\tau = 360^\circ / z$.

Проілюструємо такий підхід до визначення коефіцієнта перекриття за допомогою рис. 4.12.

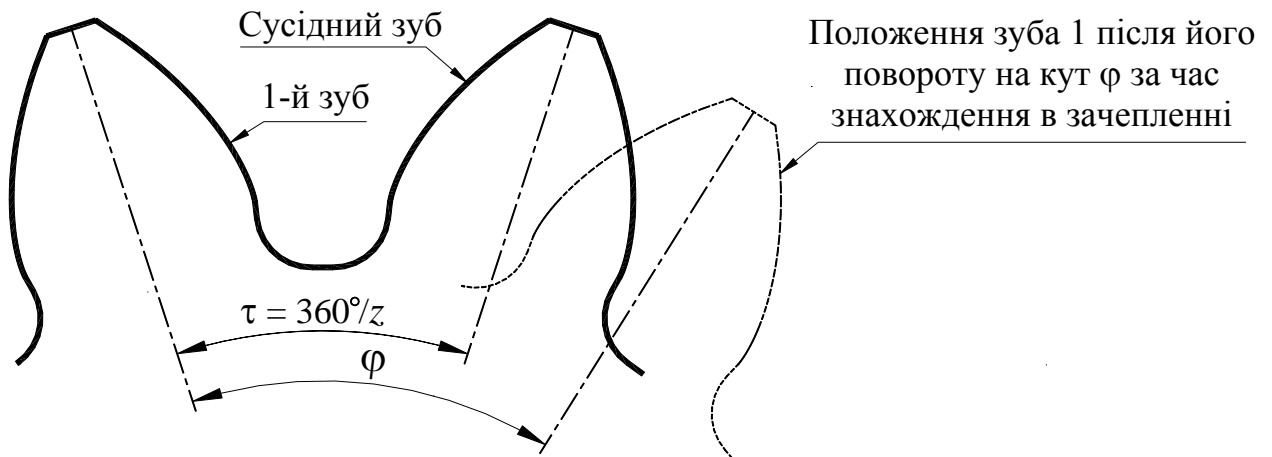


Рис. 4.12. До визначення коефіцієнта перекриття через кути

У цьому випадку коефіцієнт перекриття буде рівний

$$\varepsilon = \varphi / \tau. \quad (4.26)$$

2) Коефіцієнт перекриття – це відношення дуги зачеплення до кроку по тій же окружності.

Друге визначення є більш зручним для практичного використання.

Дуга зачеплення – це дуга, яку проходить точка профіля зубця за час його зачеплення. Дугу й крок будемо визначати по основній окружності. Розглянемо картину зачеплення на рис. 4.13.

На рисунку показано момент входу в зачеплення пари зубців, позначених номерами 1 і 2 з контактом у початковій точці робочої ділянки ЛЗ (точка

а). У точці a спостерігається контакт крайньої точки голівки зубця колеса 2 з точкою ніжки зубця колеса 1. У цей момент сусідня пара (пара, що йде спереду та показана на рисунку тонкою лінією) має контакт у точці k . Після певного повороту колеса 1 за годинниковою стрілкою крайня точка голівки зубця колеса 1 (точка b_1) потрапить у кінцеву точку робочої ділянки ЛЗ (точку b), і зубець 1 вийде із зачеплення.

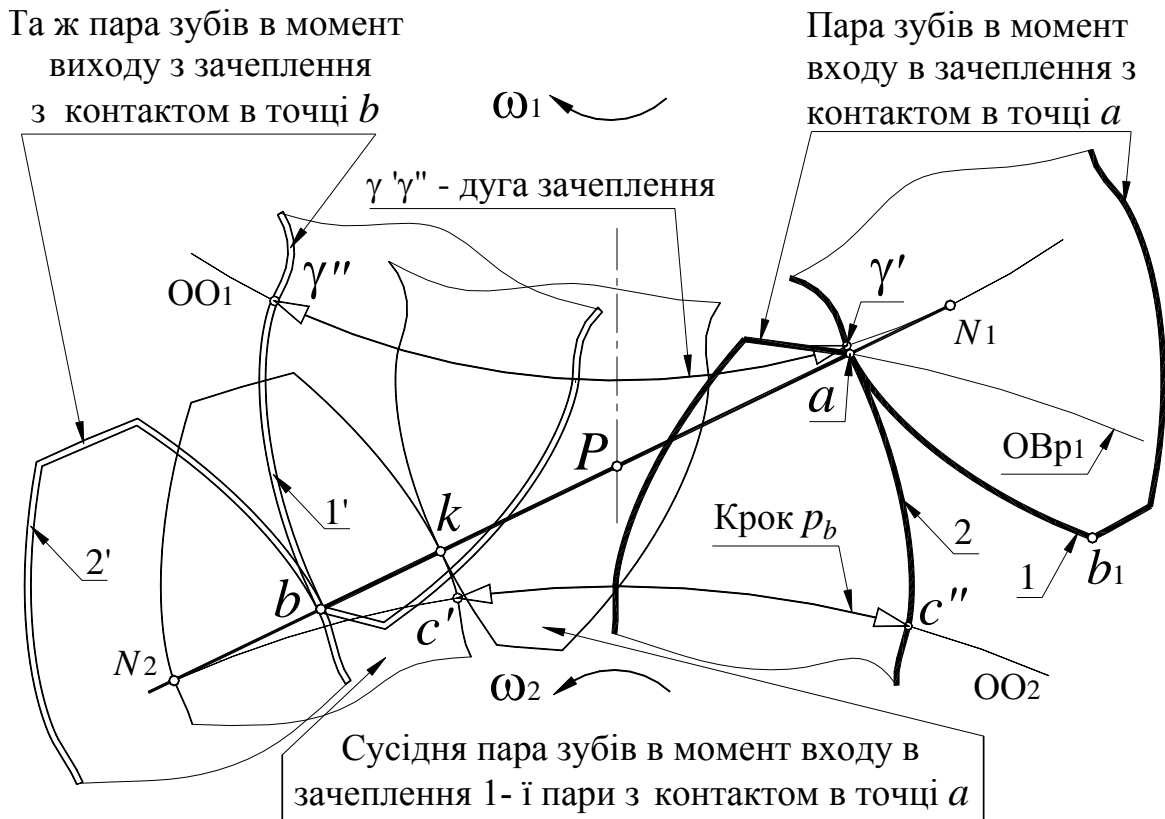


Рис. 4.13. До визначення коефіцієнта перекриття через дугу зачеплення

На рис. 4.13 пара цих же зубців при виході із зачеплення показана подвійною суцільною лінією й позначена номерами $1'$ і $2''$. Для того щоб показати крок по дузі OO_2 , на рисунку тонкою лінією показана сусідня пара зубців, яка має контакт в точці k . Величина кроку зубців по основній окружності показана тільки для колеса 2 – це дуга $c's''$. Дуга зачеплення по основній окружності для колеса 1 – це дуга $\gamma'\gamma''$. Крок по основній окружності за стандартом позначається буквою p_b , тоді коефіцієнт перекриття буде рівний

$$\varepsilon = \gamma'\gamma'' / p_b.$$

Із властивостей евольвенти випливає, що $\gamma'\gamma'' = ab$. Тоді остаточно одержимо

$$\varepsilon = ab / p_b.$$

Крок по основній окружності рівний $p_b = p \cdot \cos \alpha = m \cdot \pi \cdot \cos \alpha$, тоді

$$\varepsilon = \frac{ab}{m \cdot \pi \cdot \cos \alpha}. \quad (4.27)$$

Перепишемо формулу (4.26) у вигляді $\varepsilon = \varphi_{b_1} / \tau_{b_1} = \varphi_{b_2} / \tau_{b_2}$,

де $\tau_1 = \tau_{b_1} = \frac{p_b}{r_{b_1}} = \frac{m \cdot \pi \cdot \cos \alpha}{r_{b_1}}$; $\tau_2 = \tau_{b_2} = \frac{p_b}{r_{b_2}} = \frac{m \cdot \pi \cdot \cos \alpha}{r_{b_2}}$ – кутові кроки коліс 1 і 2;

$\varphi_1 = \varphi_{b_1}$; $\varphi_2 = \varphi_{b_2} = \varphi_1 / i_{12}$ – кути повороту зубця колеса за час знаходження в зачепленні.

Якщо чисельник і знаменник формули (4.26) перемножити на r_{b_1} або на r_{b_2} , то отримаємо формулу (4.27).

Формула (4.27) більш зручна для практичного використання, оскільки визначення кута $\varphi_1 = \varphi_{b_1}$ або $\varphi_2 = \varphi_{b_2}$ є дещо складнішим за визначення довжини відрізка ab .

На рис. 4.14 показане графічне визначення дуги зачеплення $\gamma'\gamma'' = ab$ і кута φ_{b_2} , необхідних для розрахунку коефіцієнта перекриття. Для цього було показане положення зубця 2 в момент входу в зачеплення (контакт в точці a) і в момент виходу із зачеплення (контакт в точці b). В зазначених положеннях зафарбовано частину зубця 2. Точки перетину профіля зубця 2 з OO_2 в момент входу в зачеплення і в момент виходу – це відповідно точки γ'' і γ' . Тоді отримуємо, що $\gamma'\gamma''$ – це дуга зачеплення, а кут між відрізками, проведеними з цих точок в точку O_2 , тобто кут повороту колеса 2 за час знаходження зубця цього колеса в зачепленні – $\varphi_2 = \varphi_{b_2}$.

Визначимо $\gamma'\gamma'' = ab$ аналітичним способом. Для цього скористаємось рис. 4.14.

Для визначення довжини дуги зачеплення, що рівна ab , необхідно знайти величини кутів α_w , α_{a_1} та α_{a_2} . Спочатку покажемо, що α_{a_1} і α_{a_2} дійсно є профільними кутами евольвент на радіусах r_{a_1} і r_{a_2} відповідно. Покажемо це на прикладі колеса 2. На рис. 4.14 показана затушована частина зубця колеса 2 в момент входу в зачеплення, що при цьому має контакт в точці a лінії зачеплення. Якщо провести дотичну до профіля цього зубця в точці a (перпендикуляр до ЛЗ), то вона буде проходити паралельно O_2N_2 . Ці міркування стосуються і колеса 1. Для визначення величин зазначених кутів необхідно скористатись формулами з підрозділу «Рівняння евольвенти»

$$r_y = r_b \cdot \cos \alpha_y \quad \text{або} \quad r = r_b \cdot \cos \alpha, \quad r_w = r_b \cdot \cos \alpha_w, \quad r_a = r_b \cdot \cos \alpha_a, \quad \text{ЗВІДКИ}$$

$$\alpha_w = \arccos\left(\frac{r_{b1}}{r_1} = \frac{r_{b2}}{r_2}\right), \quad \alpha_{a1} = \arccos\left(\frac{r_{b1}}{r_{a1}}\right), \quad \alpha_{a2} = \arccos\left(\frac{r_{b2}}{r_{a2}}\right).$$

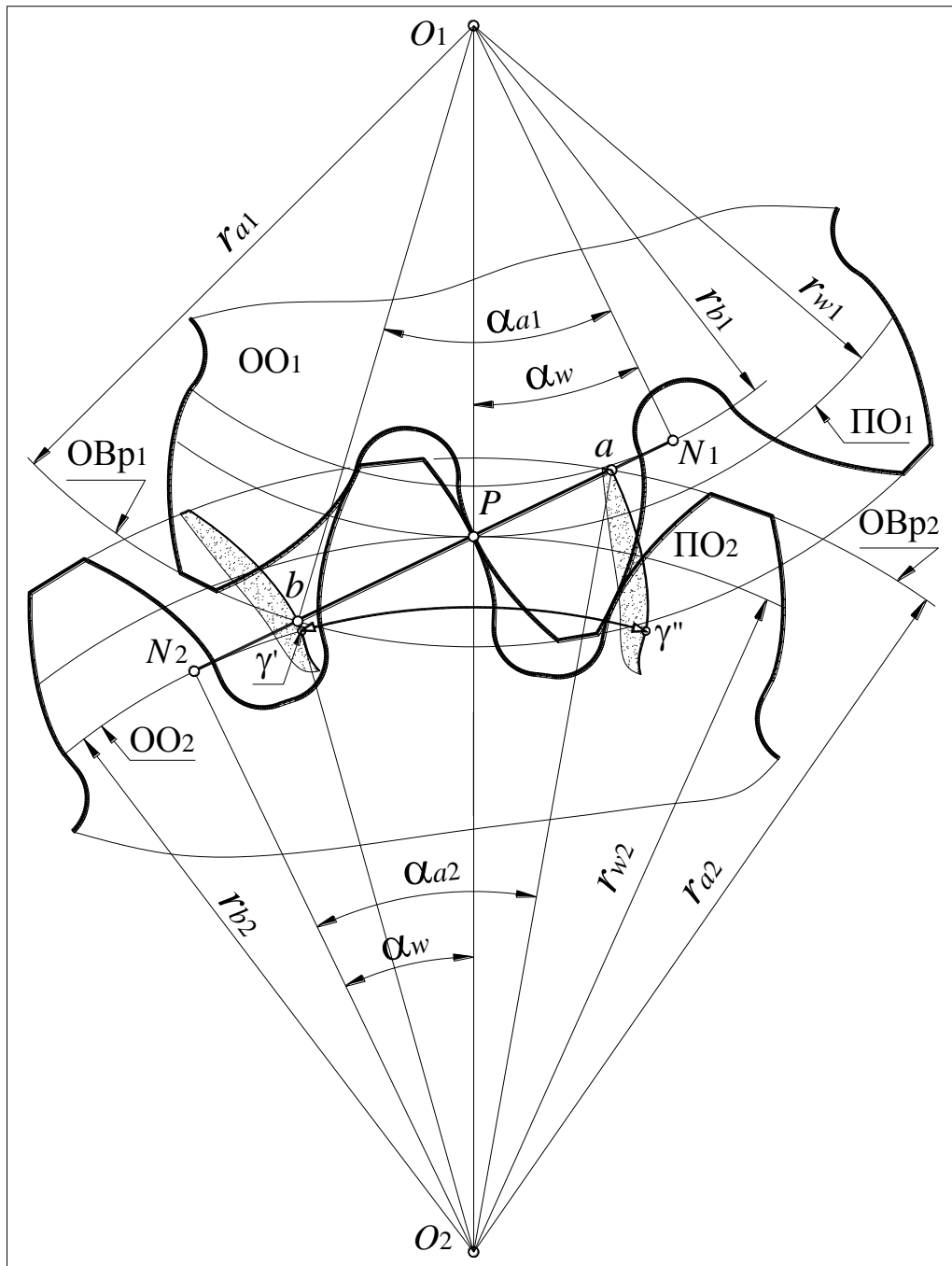


Рис. 4.14. До визначення робочої ділянки лінії зачеплення

Позначення на рис. 4.14 наступні:

r_{w1} і r_{w2} – радіуси початкових окружностей PO_1 і PO_2 ;

α_w – кут зачеплення (одночасно є профільним кутом евольвенти на радіусах PO_1 і PO_2);

α_{a_1} і α_{a_2} – профільні кути евольвент на радіусах окружностей вершин $ОВр_1$ і $ОВр_2$, радіуси яких r_{a_1} і r_{a_2} відповідно.

Інші позначення на рисунку вже розглядались раніше.

Довжину робочої ділянки лінії зачеплення ab представимо як суму відрізків aP і bP

$$ab = aP + bP. \quad (4.28)$$

В свою чергу відрізки aP і bP будуть рівні

$$\begin{aligned} aP &= N_2a - N_2P; \\ bP &= N_1b - N_1P. \end{aligned} \quad (4.29)$$

З трикутників ΔO_2N_2a , ΔO_2N_2P , ΔO_1N_1b , ΔO_1N_1P знаходимо, що

$$\begin{aligned} N_2a &= r_{b_2} \cdot \operatorname{tg}\alpha_{a_2}; \\ N_2P &= r_{b_2} \cdot \operatorname{tg}\alpha_w; \\ N_1b &= r_{b_1} \cdot \operatorname{tg}\alpha_{a_1}; \\ N_1P &= r_{b_1} \cdot \operatorname{tg}\alpha_w. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Після підстановки в (4.28) виразів (4.30) з урахуванням (4.29) отримаємо

$$ab = r_{b_2} \cdot (\operatorname{tg}\alpha_{a_2} - \operatorname{tg}\alpha_w) + r_{b_1} \cdot (\operatorname{tg}\alpha_{a_1} - \operatorname{tg}\alpha_w). \quad (4.31)$$

Мінімальне значення коефіцієнта перекриття залежить від точності зубчастого колеса і зазвичай становить $\varepsilon \geq 1,05$. Орієнтовне значення можна визначити за емпіричною формулою $\varepsilon = 1,88 - 3,2 \left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2} \right)$, де знак «+» слід приймати для зовнішнього зачеплення, а знак «-» – для внутрішнього.

з). Зони одно- і двопарного зачеплення

Як уже відзначалось, для нормальної роботи пари зубчастих коліс кожна наступна пара зубців повинна входити в зачеплення, перш ніж попередня пара вийде із зачеплення. Таким чином, повинні мати місце моменти двопарного зачеплення в моменти входу зубця в зачеплення і в момент виходу.

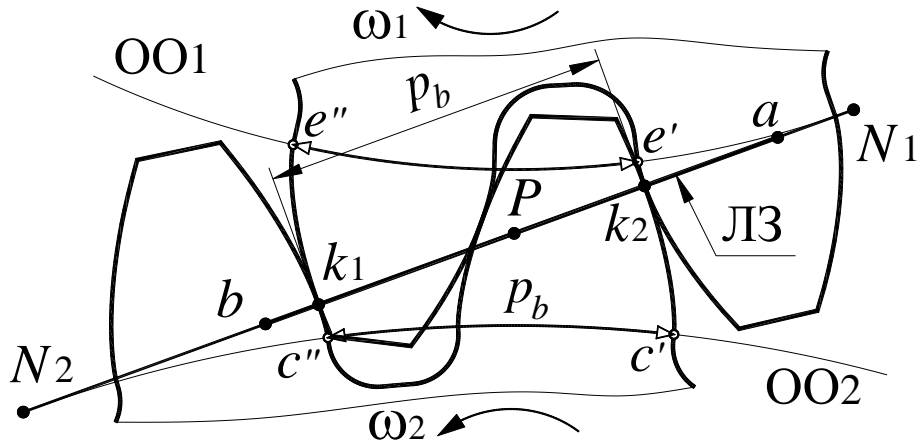


Рис. 4.15. Момент двопарного зачеплення

На рис. 4.15 показано момент, коли в зачепленні одночасно знаходяться дві пари зубців з точками контакту на лінії зачеплення k_1 і k_2 . На рисунку показано, що пара зубців з контактом в точці k_1 наближається до виходу із зачеплення в точці b , а наступна пара, яка увійшла в зачеплення в точці a , в даний момент має контакт в точці k_2 . З властивостей евольвенти слідує, що дистанція між точками контакту 2-х пар зубців $k_1k_2 = c'c''$, де $c'c''$ – довжина дуги по OO_2 , аналогічно $k_1k_2 = e'e''$, де $e'e''$ – довжина дуги по OO_1 . Дуга $c'c''$ – це крок по основній окружності p_b . З розглянутого робимо висновок, що дистанція між точками контакту зубців $k_1k_2 = p_b = \text{const}$.

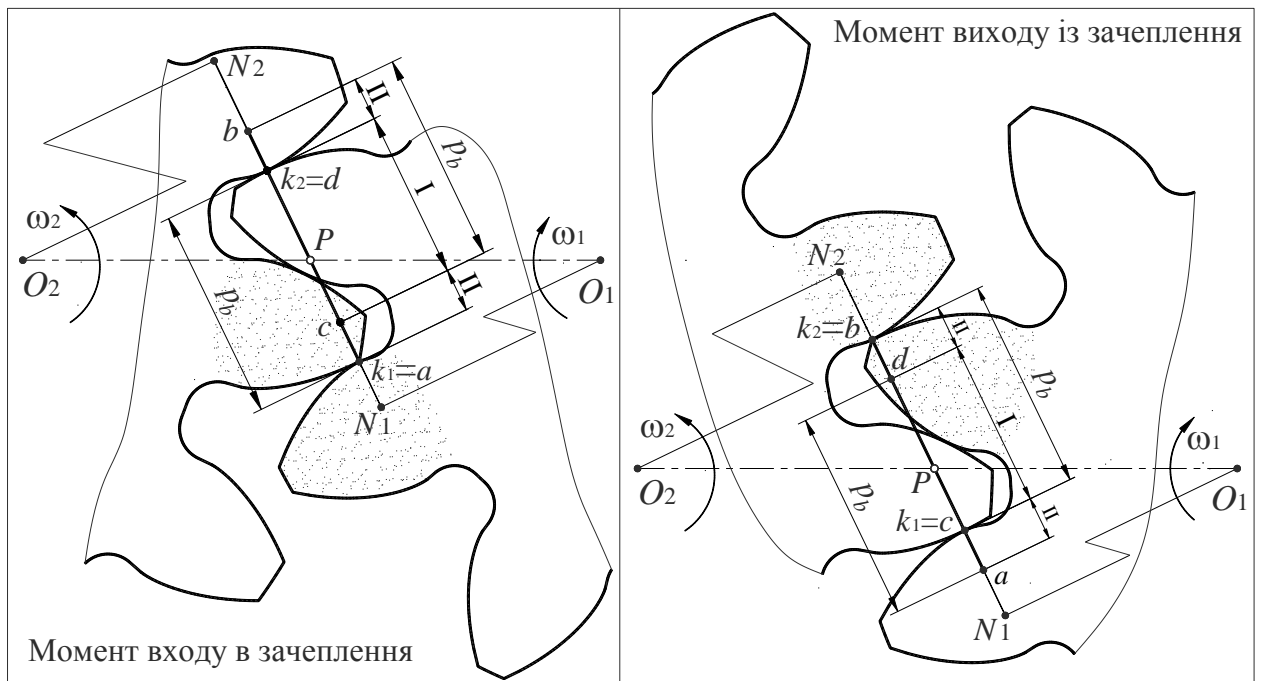


Рис. 4.16. До визначення зон одно- і двопарного зачеплення

Враховуючи зазначене визначимо зони на лінії зачеплення, в яких в зачепленнях знаходиться одна і дві пари зубців (див. рис. 4.16).

На рис. 4.16 показано момент входу в зачеплення (зліва) і момент виходу із зачеплення пари зубців (справа), які на цьому рисунку частково затушовані. На обох частинах рис. 4.16 на лінії зачеплення окрім уже відомих позначень точок (N_1 , N_2 , P , a і b) є ще дві характерні точки з позначками c і d , які розташовані на відстані p_b від точок b і a відповідно. При вході в зачеплення пара зубців має контакт в початковій точці робочої ділянки ЛЗ (точка a), тобто $k_1 = a$. В цей момент попередня пара на відстані p_b має контакт в точці d лінії зачеплення ($k_2 = d$). З цього моменту в зачепленні знаходяться дві пари зубців. Точки контакту двох пар зубців k_1 і k_2 відповідно знаходяться в точках a і d лінії зачеплення. Коли контакт попередньої пари (точка контакту k_2) дійде кінцевої точки ЛЗ (точки b), вона вийде з зачеплення. Таким чином на ділянках ЛЗ ac і bd в зачепленні одночасно знаходяться дві пари зубців, тобто ці ділянки є зонами двопарного зачеплення. На рис. 4.16 вони мають позначку «II». На ділянці лінії зачеплення cd в зачепленні буде знаходитись тільки одна пара зубців (на рис. 4.16 вона має позначку «I»).

4.3. Виготовлення зубчастих коліс

У сучасному машинобудуванні в переважній більшості застосовуються евольвентні зубчасті колеса, тому увага буде приділена саме таким колесам.

Зубчасті колеса можна відливати, штампувати, накочувати й нарізати. В основному зубчасті колеса нарізають на спеціальних верстатах.

При виготовленні коліс реалізується один з двох методів:

- 1) Метод копіювання (лиття, штампування, накатка, нарізування);
- 2) Метод обкатування (накатка, нарізування).

Колеса переважно виготовляють методом обкатування.

a). Метод копіювання

При цьому методі застосовуються в основному дискові, а також пальцеві модульні фрези. За допомогою таких фрез фрезерують западини зубчастих коліс, і природно, що форма ріжучої частини фрези повинна забезпечувати фрезерування досить точної форми западини, а значить і форми зубця. На горизонтально-фрезерних верстатах застосовують дискові, а на вертикально-фрезерних – пальцеві фрези (рис. 4.17). В обох випадках заготовка встановлюється в шпинделі ділильної голівки й після фрезерування западини заготовка повертають на кутовий крок колеса $\tau = 360^\circ / z$.

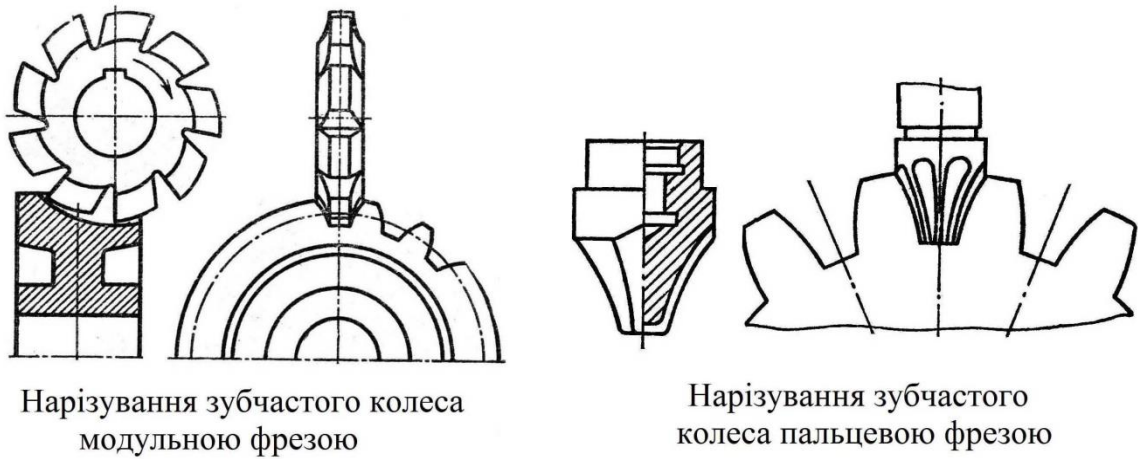
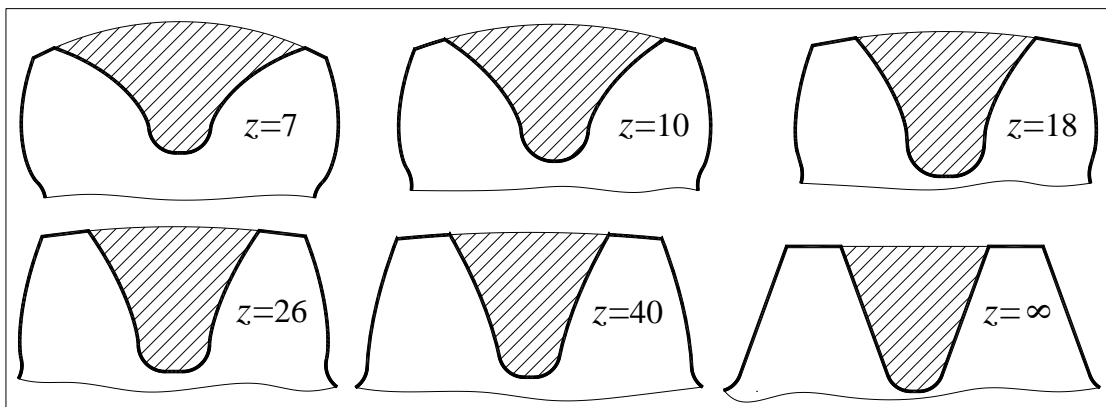


Рис. 4.17. Нарізування зубчастих коліс методом копіювання

Зрозуміло, що для кожного модуля застосовується свій набір фрез. Число розповсюджених модулів досить велике, що викликає необхідність у наявності великої кількості інструментів. Ще більш складною проблемою є те, що форма зубця, а значить і западини, залежить від z . На рис. 4.18 наведено досить точні форми зубців для ряду z від $z=7$ до $z=\infty$ (рейка).

Рис. 4.18. Залежність форми западини від z .

Як видно з наведеного рисунка, форма зубця й западини (заштриховані) суттєво залежить від значення z . Особливо це проявляється при малих числах зубців. Нижче наведена таблиця з інформацією щодо наборів фрез.

Таблиця 4.1

Набір із восьми дискових модульних фрез

№ фрези	1	2	3	4	5	6	7	8
Інтервал чисел зубців коліс, що нарізуються	12–13	14–16	17–20	21–25	26–34	35–54	55–134	135 і більше

Найбільш поширені набори з 8 фрез. Для коліс із великим модулем застосовується набір з 15 або 27 фрез. В такому випадку у проміжках між номерами 1...8 додано 7 фрез із номерами $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, ..., $7\frac{1}{2}$. Відзначимо, що для кожного інтервалу найбільшу западину має колесо з найменшим z . Профіль фрези такий самий, як і профіль западини колеса з найменшою кількістю зубців даного діапазону. Колеса з найбільшим числом зубців діапазону будуть мати найбільшу похибку профіля. Крім похибки, пов'язаної з неточністю інструменту, завжди має місце похибка в роботі ділильної голівки. З викладеного очевидно, що цей метод відрізняється зниженою точністю й низькою продуктивністю, тому він зазвичай застосовується в умовах дрібносерійного виробництва і невеликих майстерень.

б). Метод обкатування

Для нарізування коліс цим методом застосовується один з наступних інструментів: довбач – інструментальне колесо, рейка (гребінка) – виробляючий контур, черв'ячна фреза.

Сутність методу нарізування колеса полягає у наступному: у верстатному зачепленні колеса, що нарізується, і інструменту відтворюють роботу пари «колесо-колесо», «колесо-рейка» або «колесо-черв'як». На рис. 4.19, 4.20, 4.22 показана взаємодія колеса, що нарізується, і інструмента.

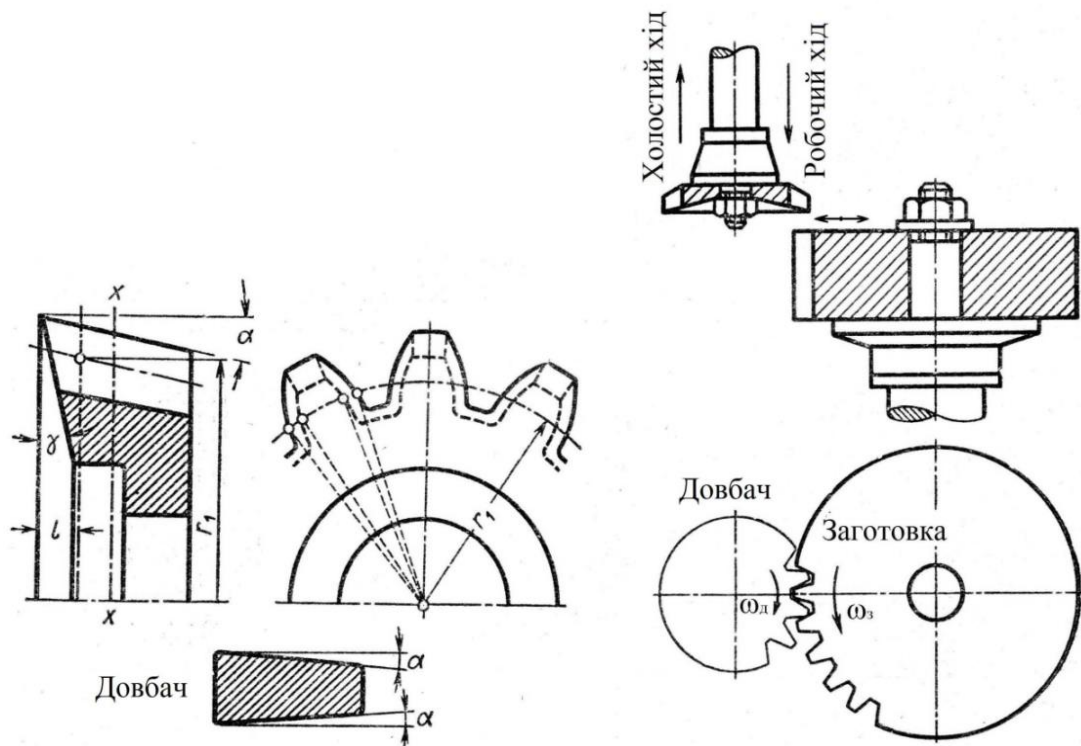


Рис. 4.19. Нарізування зубчастого колеса довбачем

Процес нарізування колеса починається без обкатних рухів довбача і заготовки: довбач, здійснюючи зворотно-поступальні рухи, отримує радіальну подачу і «врізається» в заготовку до досягнення розрахованої міжосьової відстані a , яка зберігається постійною до кінця процесу нарізання.

Після досягнення заданого значення a довбач і заготовка отримують обкатні рухи у відповідності з передатним відношенням $i_{зд} = z_d / z_3$, зворотно-поступальними рухами довбач продовжує процес нарізування. Для запобігання пошкодження ріжучих кромки довбача при його зворотному русі заготовка дещо відводиться від довбача, а при робочому ході повертається у початкове положення. Слід відзначити, що довбачем можна нарізати не тільки прямозубі, а й косозубі колеса. Для нарізування косозубих коліс з зовнішніми і внутрішніми зубцями застосовують косозубі довбачі. Для нарізування косозубих коліс з внутрішніми зубцями використовують довбачі з таким же кутом нахилу зубця, а для отримання коліс із зовнішніми зубцями – з кутом протилежного знаку (як у пари косозубих коліс).

Колеса з внутрішніми зубцями нарізають виключно довбачем. При цьому для уникнення інтерференції необхідно, щоб $z_2 \geq \frac{z_1^2 - 34}{2z_1 - 34}$. Наведена залежність отримана за умови, що $h_a = 1,0$ і $N_1 \equiv a$ (границі теоретичної і робочої ділянок зливаються), в той час як у довбача $h_a = 1,25$.

Зважаючи на те, що в колесах з внутрішніми зубцями зазвичай досить велика кількість зубців, при нарізуванні таких коліс в більшості випадків достатньо, щоб число зубців довбача було $z_d \geq 22$. При нарізуванні коліс з зовнішніми зубцями, виходячи з цих же міркувань, рекомендується, щоб $z_d \geq z_k + 1$. Слід відзначити, що нарізування коліс довбачем – це найбільш універсальний спосіб.

Нарізування зубчастого колеса рейкою (див. рис. 4.20) принципово не відрізняється від нарізування довбачем. Процес також відбувається на зубодовбальному верстаті але за допомогою іншого інструменту – інструментальної рейки.

Спочатку інструментальна рейка (гребінка) врізається в заготовку на повну висоту зубця колеса, після чого окрім зворотно-поступального руху рейки її і колесу надають обкатальні рухи, при яких $V_p = \omega_3 \cdot r_3$, де V_p – поступальна швидкість рейки, r_3 – радіус ділильної окружності заготовки. Можливі варіанти, коли рейка здійснює тільки зворотно-поступальний рух, а ділильна окружність заготовки котиться по початковій прямій рейки. Процес продовжується до тих пір, поки заготовка не зробить повний оберт.

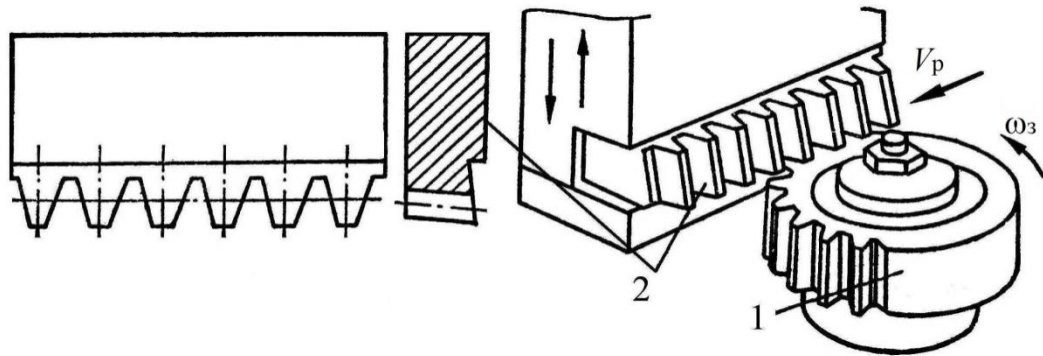


Рис. 4.20. Нарізування зубчастого колеса рейкою (виробляючим контуром)

Оскільки довжина ділільної прямої значно менше ділільної окружності колеса, то періодично рейку повертають в початкове положення для продовження процесу нарізування. На рис. 4.21 показано, як формуються западини колеса при нарізуванні рейкою.

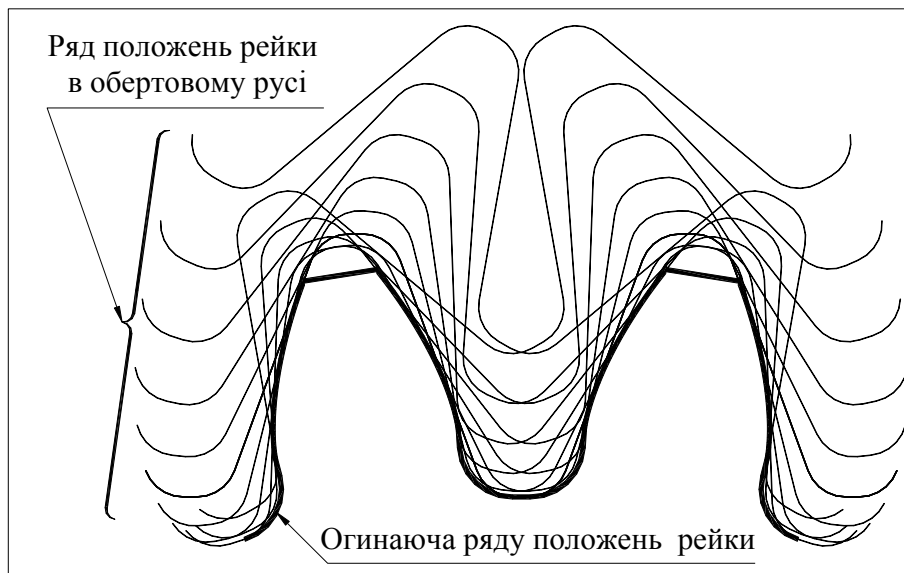


Рис. 4.21. Профіль западини колеса, як огинаюча ряду положень профіля зубця рейки

Черв'ячну фрезу можна розглядати як циліндр, на якому установлені рейки, кожна з яких зміщена одна відносно іншої в осьовому напрямку. В осьовому перерізі профіль фрези такий же як і у інструментальної рейки. Саме цей інструмент найчастіше застосовується при нарізуванні зубчастих коліс. Продуктивність нарізування черв'ячною фрезою значно вище ніж при нарізуванні гребінкою. При обкатному русі пари «заготовка-інструмент» (рис. 4.22) реалізується передатне відношення $i_{чз} = z_3 / z_ч$, де $z_ч$ – число витків черв'ячної фрези (число заходів), z_3 – число зубців колеса.

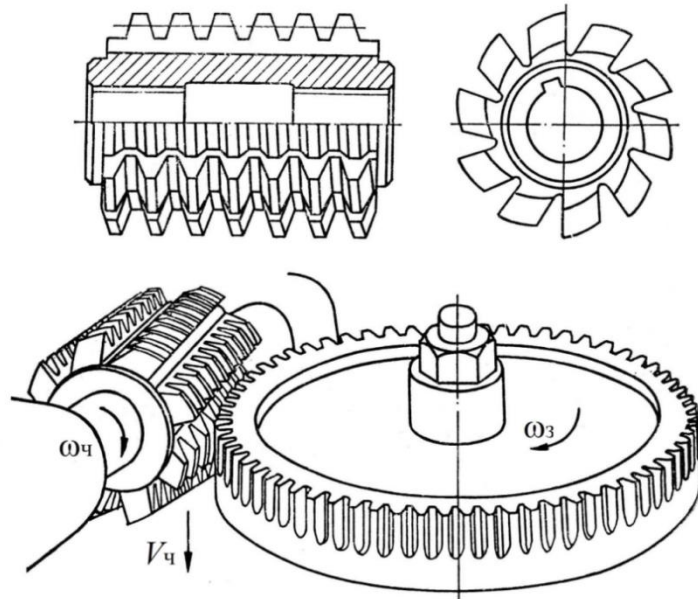


Рис. 4.22. Нарізування зубчастого колеса черв'ячною фрезою

в). Мінімальне число зубців зубчастого колеса

При розгляді питання про евольвентне зачеплення було встановлено, що евольвенти можуть торкатись одна одної тільки в межах теоретичної ділянки лінії зачеплення N_1N_2 . Границі N_1 і N_2 – це точки дотику лінії зачеплення до основних окружностей OO_1 і OO_2 . Якщо точка взаємодії виходить за межі N_1 або N_2 , то евольвенти перетинаються (інтерферують). Якщо подібне буде мати місце в зачепленні зубчастих коліс, то вони заклинять, а у верстатному зачепленні пари «інструмент-заготовка» буде підрізана ніжка зубця або частково зрізана голівка нарізаного колеса (див. рис. 4.23).

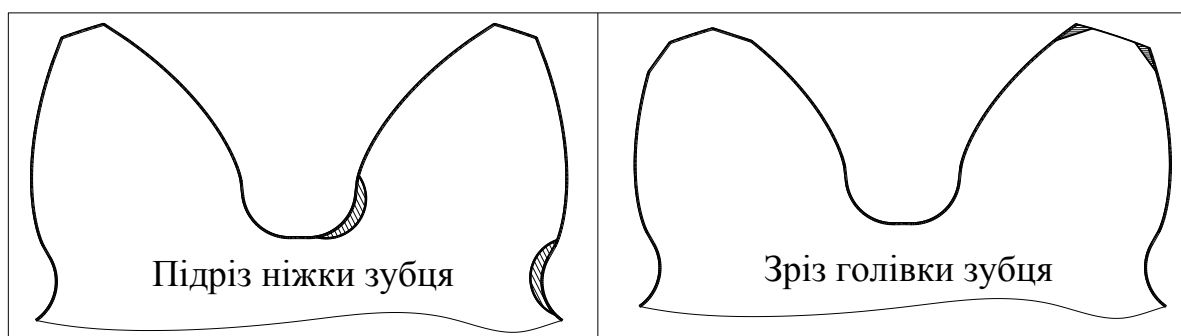


Рис. 4.23. Підріз ніжки і зріз голівки зубця

Підріз ніжок зубців є не бажаним, оскільки в такому випадку послабляється ніжка зубця і частина евольвентного профіля біля основної окружності зрізується. У верстатному зачепленні пари «заготовка-інструмент» зазвичай відбувається підріз ніжки колеса, що нарізується. Тільки при неправильному

виборі довбача (мале число зубців) можливий випадок зрізу голівки зубця, що на практиці не буває.

Визначимо мінімальне число зубців колеса z_{\min} з умови відсутності підрізу. При розв'язанні завдання використовуватимемо рис. 4.24.

Позначення на рис. 4.24 наступні:

OO_1 і OO_2 – основні окружності з радіусами r_{b1} і r_{b2} ;

N_1N_2 – теоретична ділянка лінії зачеплення;

OB_{p1} і OB_{p2} – окружності вершин;

P – полюс зачеплення;

a і b – границі робочої ділянки ЛЗ (слід зазначити, що для розгляду даного питання границя b не потрібна й показана тільки для орієнтування).

На рис. 4.24 початкові окружності (ПО₁ і ПО₂) не показані з метою усунення надлишкової інформації, але слід мати на увазі, що ПО₁ і ПО₂ торкаються в полюсі P , а їх радіуси відповідно рівні $r_{w1} = O_1P$, $r_{w2} = O_2P$.

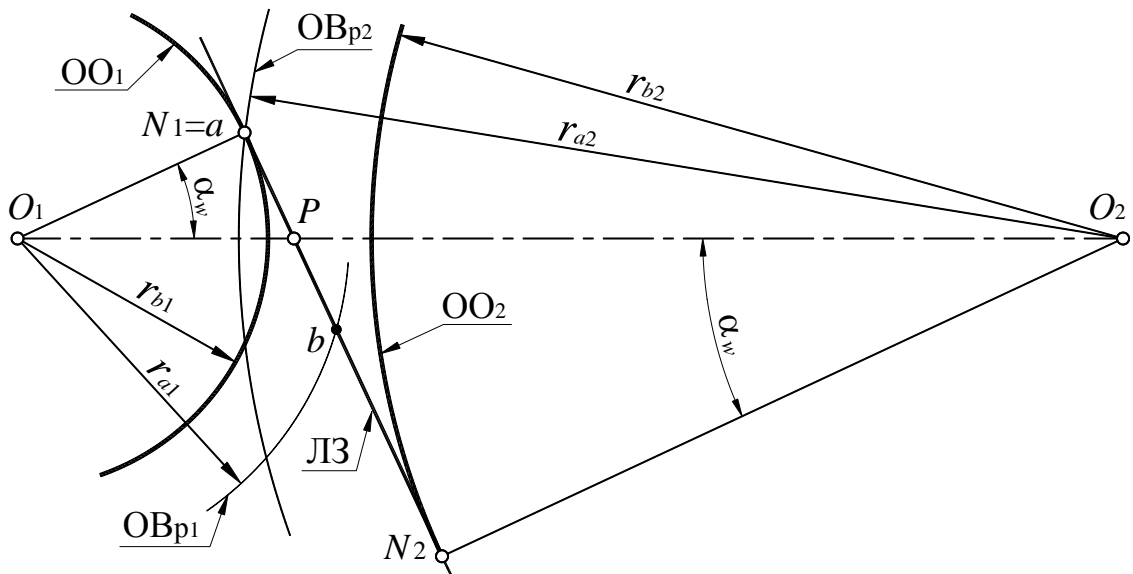


Рис. 4.24. Випадок збігу границі робочої ділянки ЛЗ з границею теоретичної ділянки

На рис. 4.24 показано випадок, коли границя робочої ділянки a ЛЗ збігається із границею теоретичної ділянки N_1 . Оскільки співвідношення частин теоретичної ділянки ЛЗ N_1P і N_2P можна виразити співвідношенням

$$\frac{N_2P}{N_1P} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = i_{12},$$

то стає очевидним, що для границі N_2 такий збіг не можливий. Тобто, якщо відбувається вихід границі робочої ділянки за рамки ділянки N_1N_2 , це буде відбуватися біля границі N_1 , де взаємодіють ніжка коле-

са 1 і голівка колеса 2. І тоді, якщо 2 є довбачем, буде спостерігатися підріз ніжки зубця колеса 1, а якщо 1 є довбачем, то буде відбуватися зріз голівки зубця колеса 2. З рисунка також наочно видно, що для даного колеса 2 у випадку, коли менше колесо трохи збільшимо, границя N_1 зміститися вище по ЛЗ і з'явиться «запас», а при зменшенні радіуса r_1 відбудеться вихід робочої ділянки ЛЗ за межі теоретичної. З викладеного можна зробити наступний висновок: чим більше колесо 2, тим більше мінімальне колесо, яке буде працювати з ним без заклинювання й навпаки.

Загальний висновок: найбільше мінімальне колесо – це колесо в його рейковому зачепленні. Відповідно, найбільше мінімальне колесо – це колесо, яке нарізується інструментом рейкового типу (виробляючий контур, черв'ячна фреза). Із цього випливає висновок, що всі колеса, нарізані інструментом рейкового типу, однозначно без заклинювання можуть працювати з будь-якими іншими колесом.

Викладене вище є обґрунтуванням підходу до розв'язку поставленого завдання з визначення мінімального числа зубців колеса, яке можна нарізати рейкою без підрізу, або іншими словами забезпечити роботу рейки без заклинювання.

Для визначення z_{\min} колеса, яке нарізане інструментом рейкового типу, розглянемо рис. 4.25.

Усі позначення, показані на рисунку, вже неодноразово використовувались, тому не потребують пояснення.

При розв'язанні завдання відомими є наступні величини:

$\alpha = 20^\circ$ – кут профілю вихідного контуру;

$BP = h_a^* \cdot m$ – висота голівки зубця.

Із трикутника $\Delta NPВ$ знаходимо NP у вигляді

$$NP = \frac{BP}{\sin \alpha} = \frac{h_a^* \cdot m}{\sin \alpha}. \quad (4.32)$$

Із трикутника $\Delta O_{\min} NP$ гіпотенуза $O_{\min} P = r_{\min}$ буде

$$r_{\min} = O_{\min} P = \frac{NP}{\sin \alpha} = \frac{h_a^* \cdot m}{\sin^2 \alpha}. \quad (4.33)$$

Тоді із виразу $r_{\min} = \frac{m \cdot z_{\min}}{2} = \frac{h_a^* \cdot m}{\sin^2 \alpha}$ знаходимо мінімальне число зубців

$$z_{\min} = \frac{2h_a^* \cdot m}{\sin^2 \alpha} \approx 17. \quad (4.34)$$

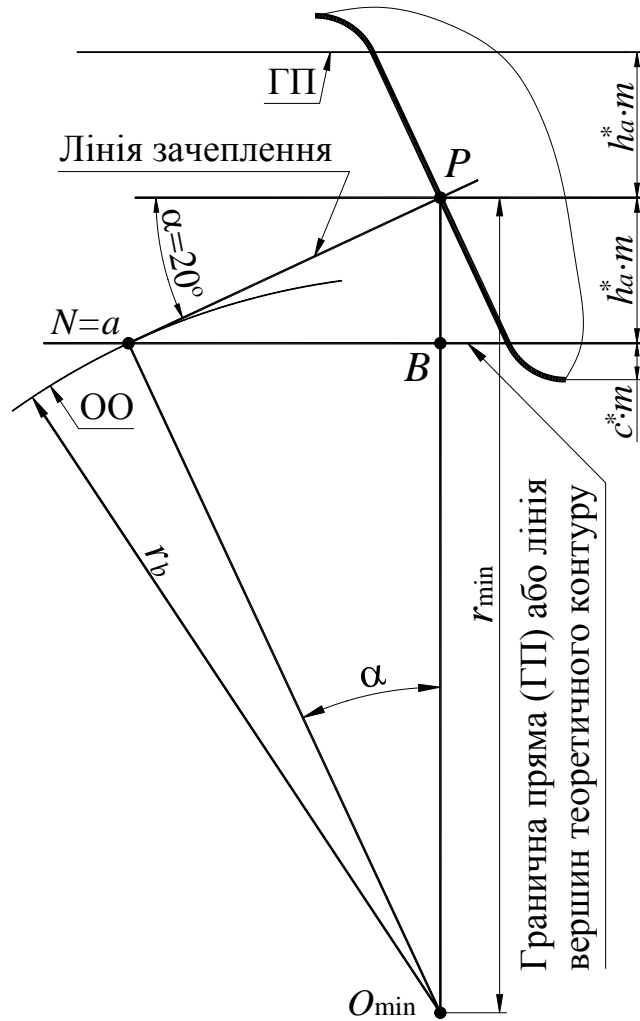


Рис. 4.25. До визначення z_{\min} колеса, що нарізується рейкою

г). Виготовлення зубчастих коліс зі зсувом інструмента

Виготовлення зубчастих коліс зі зсувом інструмента (рейкового типу або довбача) виконують із наступних причин:

- 1) можливість нарізування зубчастого колеса без підрізу ніжки зубця при $z < z_{\min} = 17$;
- 2) підвищення контактної (σ_H) й згинальної (σ_F) міцності зубця;
- 3) варіювання міжосьовою відстанню (при необхідності «вписати» дану пару коліс у необхідну міжосьову відстань a_w).

Розглянемо нарізування зубчастих коліс зі зсувом інструментом рейкового типу. Зсув рейки оцінюється коефіцієнтом зсуву x і відповідно самою величиною зсуву в міліметрах $X = m \cdot x$. При цьому за позитивний зсув прийнято зсув від центру колеса.

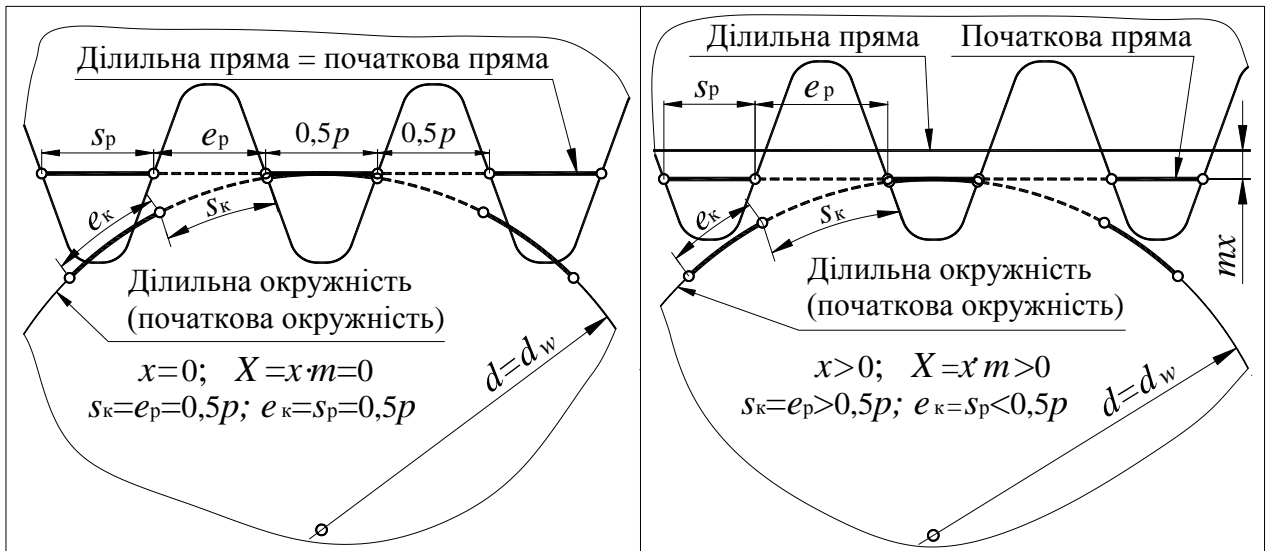


Рис. 4.26. Нарізування зубчастих коліс із зсувом рейки

При нарізуванні зубчастих коліс без зсуву інструментом рейкового типу (рейка, черв'ячна фреза) по ділильній окружності (ДО) без ковзання перекочується ділильна пряма рейки (ДП). Таким чином, ДО й ДП є початковими. На рис. 4.26 показані випадки взаємного положення колеса, що нарізується, й рейки, коли $x=0$ і $x>0$. Випадок $x<0$ не показаний, оскільки він цілком зрозумілий з розгляду випадку $x>0$.

Першу причину використання зсуву з наведеного вище переліку ми докладно розглянемо нижче, а сутність останніх двох (вплив на σ_H і σ_F , а також на a_w) можна зрозуміти, розглянувши результат зсуву інструмента. З рис. 4.26 наочно видно, що при $x=0$ по ДО окружності без ковзання перекочується ДП рейки (відіграє роль ПП). По ДП рейки товщина зубця рейки дорівнює ширині западини, відповідно й у колеса, що нарізується, товщина зубця і ширина западини будуть однаковими, оскільки при перекочуванні без ковзання буде дотримуватися умова рівності товщини зубця колеса (це дуга) ширині западини рейки (пряма). Відповідно й ширина западини колеса (це дуга) дорівнює товщині зубця рейки. Зазначене наочно видно з лівої частини рис. 4.26.

При позитивному зсуві ($x>0$) товщина зубця в основі збільшується, і міцність зубця на вигин росте (σ_F – напруження вигину). З іншого боку в цьому випадку в якості евольвентної частини профілю використовується трохи зміщена від основної окружності частина евольвенти, на якій радіуси кривизни більші, що позитивно позначається на контактних напруженнях (σ_H – контактні напруження). Контактні напруження σ_H , як відомо, залежать від зведеного радіуса кривизни ρ профілів.

Якщо колеса виготовлені без зсуву, відповідно у цьому випадку товщини їх зубців рівні ширинам западин, то в зачеплення їх можна ввести так, що ділильні окружності будуть торкатися одна одної й ділильні окружності будуть початковими (ПО). Для коліс, виготовлених зі зсувом, ДО не зможуть торкатися одна одної й у такий спосіб з'являється можливість варіювати міжосьовою відстанню.

д). *Визначення мінімально необхідного зсуву x_{\min}*

Визначимо мінімально необхідний зсув рейки x_{\min} за умови відсутності підрізу зубців колеса, у якого число зубців менше мінімального z_{\min} , тобто $z < z_{\min} = 17$. Розглянемо рис. 4.27.

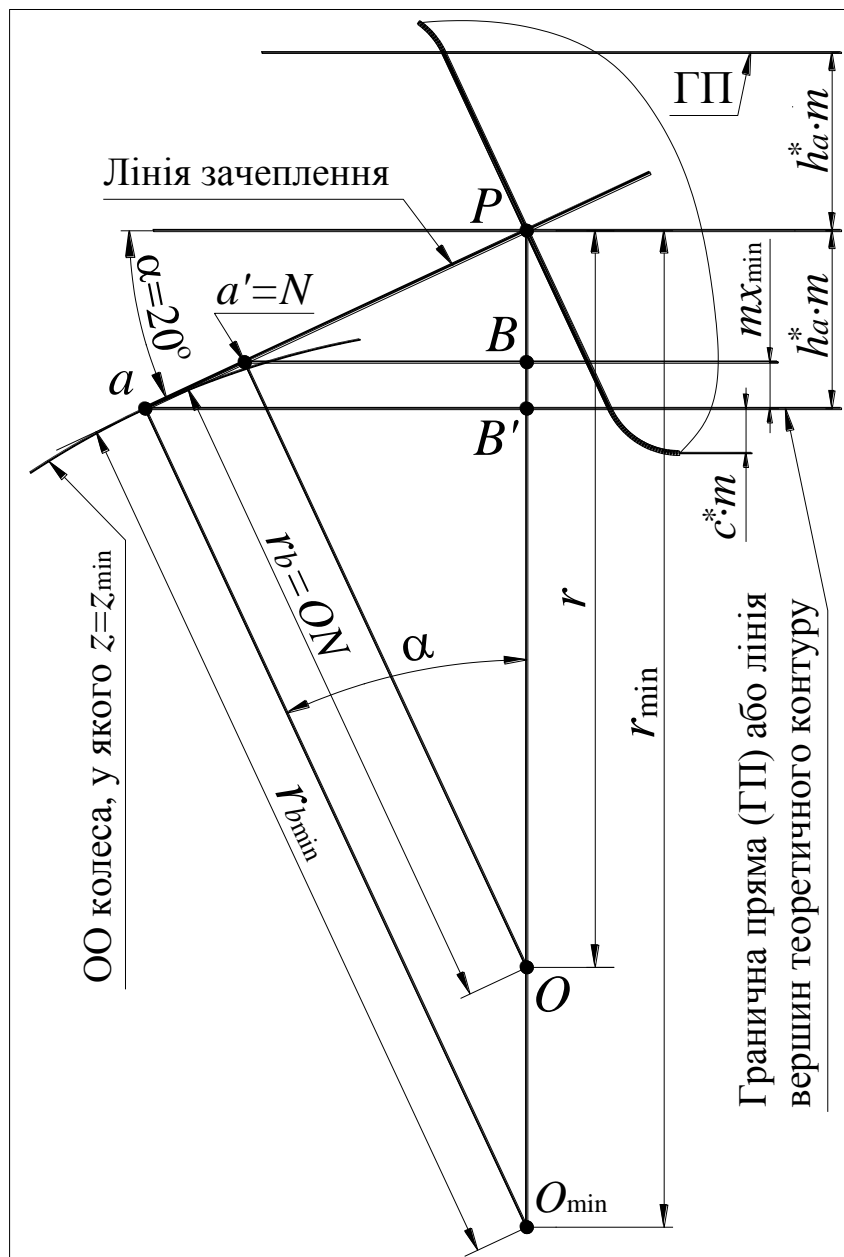


Рис. 4.27. До визначення мінімально необхідного зсуву

Практично всі позначення, які показані на рис. 4.27, були розглянуті раніше. Відзначимо лише найважливіше. O_{\min} – центр мінімального колеса. Колесо з центром в цій точці буде нарізано без підрізу, оскільки границя робочої ділянки ЛЗ – точка a (точка перетинання ЛЗ з граничною прямою) – збігається з границею теоретичної ділянки ЛЗ, що є точкою дотику ЛЗ з основною окружністю мінімального колеса (на рисунку ця точка не позначена). При розгляді цього питання будемо мати на увазі, що нижня ГП на рис. 4.27 – це ніби окружність вершин колеса, у якого $z = \infty$, і відповідно, точка перетину ГП з ЛЗ – це границя робочої ділянки ЛЗ.

Необхідно нарізати колесо із центром у точці O . Оскільки границя робочої ділянки ЛЗ (точка a' , що є точкою перетинання ЛЗ із ГП) виходить за межі теоретичної ділянки ЛЗ (точки N , що є точкою дотику основної окружності колеса, що нарізується, й ЛЗ), то колесо буде нарізано з підрізом. Для усунення підрізу змістимо рейку вгору так, щоб ГП рейки перетинала ЛЗ у точці N , в результаті чого нова границя робочої ділянки ЛЗ (точка a') буде збігатись з N . Згадане зміщення становить $m \cdot x_{\min}$ і є мінімально необхідним зсувом рейки для нарізування колеса при $z < z_{\min} = 17$.

З рис. 4.26 мінімально необхідний зсув інструмента становить

$$mx_{\min} = h_a^* \cdot m - BP. \quad (4.35)$$

Із трикутника $\Delta NPВ$ знаходимо

$$BP = NP \cdot \sin \alpha. \quad (4.36)$$

З трикутника ΔONP знаходимо $NP = OP \cdot \sin \alpha = r \cdot \sin \alpha$ і після підстановки в (4.36) отримаємо

$$BP = r \cdot \sin^2 \alpha. \quad (4.37)$$

Підставляючи значення BP до формули (4.35), отримаємо $mx_{\min} = h_a^* \cdot m - r \cdot \sin^2 \alpha$ або

$$mx_{\min} = h_a^* \cdot m - \frac{mz}{2} \cdot \sin^2 \alpha. \quad (4.38)$$

З формули для мінімального числа зубців колеса $z_{\min} = \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha}$ знаходимо

$$\sin^2 \alpha = \frac{2h_a^*}{z_{\min}}. \quad (4.39)$$

Після підстановки (4.39) у вираз (4.38) отримаємо

$$mx_{\min} = h_a^* \cdot m - mz \frac{h_a^*}{z_{\min}}, \text{ звідки}$$

$$x_{\min} = h_a^* \cdot \left(\frac{z_{\min} - z}{z_{\min}} \right). \quad (4.40)$$

З урахуванням $z_{\min} = 17$, отримаємо вираз для визначення значення мінімального коефіцієнту зсуву

$$x_{\min} = h_a^* \cdot \left(\frac{17 - z}{17} \right). \quad (4.41)$$

4.4. Проектування беззазорного зубчастого зачеплення

Беззазорним зачепленням називається таке, у якого відсутній боковий зазор. Умова беззазорного зачеплення буде встановлена пізніше, попередньо розглянемо низку питань необхідних для розв'язку поставленого завдання.

а). Нульова й позитивна передачі

Як ми вже відзначали, зубчасті колеса, виготовлені без зсуву, можна ввести в зачеплення так, що ділильні окружності (ДО) будуть торкатись одна одної й ділильні окружності будуть початковими (ПО). У цьому випадку ми одержимо передачу з беззазорним зачепленням. У такої передачі $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ і, відповідно, $x_{\Sigma} = x_1 + x_2 = 0$. Алгебраїчну суму двох зсувів будемо називати сумарним зсувом x_{Σ} . Точно такий же результат можна одержати, якщо обидва колеса виготовлені зі зсувом. При цьому завжди $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, а $x_{\Sigma} = 0$.

Передача, у якої $x_{\Sigma} = 0$ будемо називати нульовою передачею, передачею з $x_{\Sigma} > 0$ – позитивною, а при $x_{\Sigma} < 0$ – негативною (див. рис. 4.28).

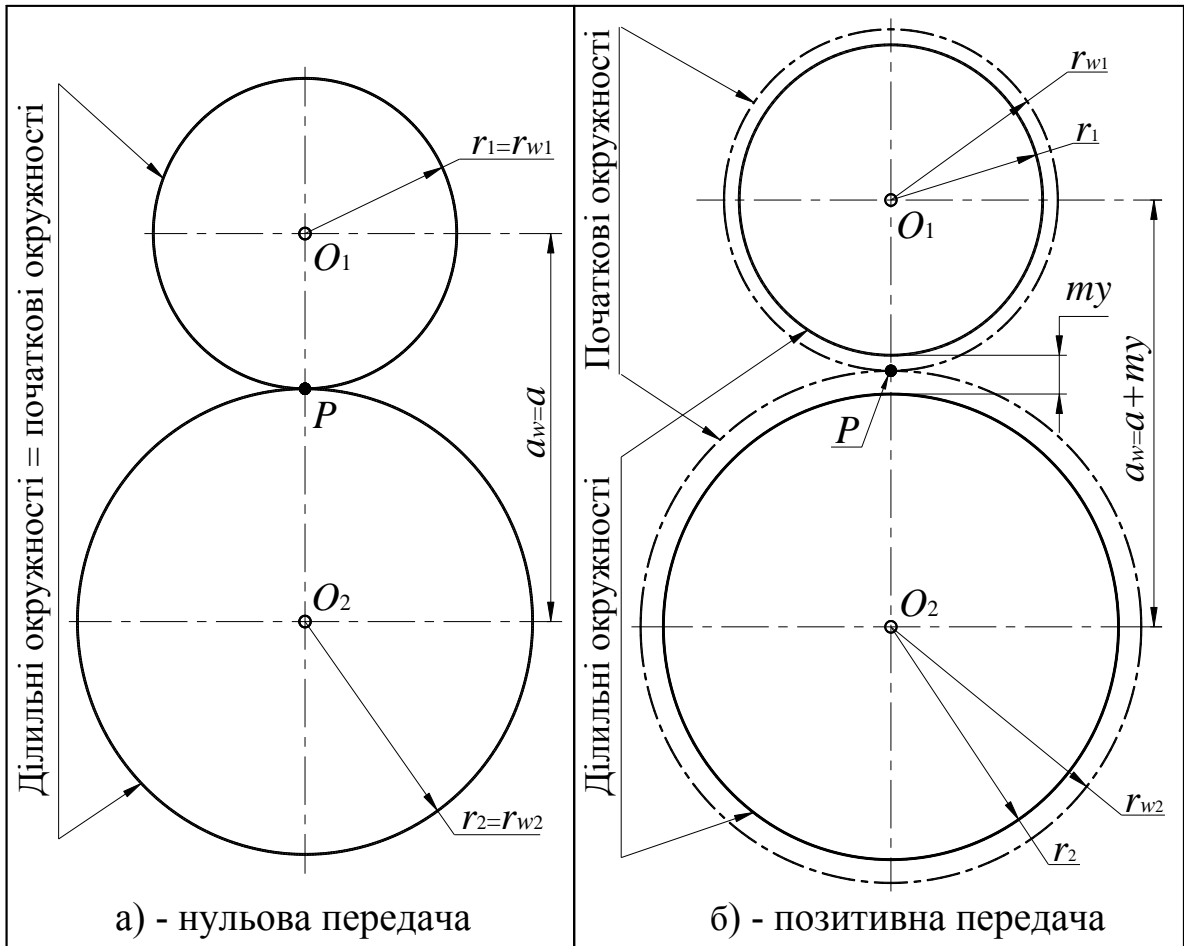


Рис. 4.28. Нульова й позитивна передачі

Позначення на рис. 4.28 наступні:

r_1 і r_2 – радіуси ділільних окружностей;

r_{w1} і r_{w2} – радіуси початкових окружностей;

$a = r_1 + r_2 = 0,5 \cdot m(z_1 + z_2) = 0,5 \cdot m \cdot z_\Sigma$ – ділільна міжосьова відстань;

a_w – міжосьова відстань;

mu – сприйманий зсув.

Сприйманий зсув – це такий зсув, у результаті якого зачеплення буде безззорним. Якби ми виготовили колеса зі зсувами x_1 і x_2 та встановили колеса з міжосьовою відстанню рівною $a'_w = a + m \cdot (x_1 + x_2) = a + m \cdot x_\Sigma$, то в зачепленні був би боковий зазор, тобто $mx_\Sigma > mu$. Але при такій міжосьовій відстані збереглася б висота зубця рівною $h = h_a + h_f = m(2h_a^* + c^*)$, тобто мала б стандартне значення.

Для визначення сприйманого зсуву треба знайти міжосьову відстань безззорного зачеплення a_w , що буде зроблено нижче. Відзначимо, що при $x_\Sigma \neq 0$ ділильні окружності не будуть початковими.

б). Умова безззорного зачеплення

На рис. 4.29 показані сектори пари коліс, у яких боковий зазор $j_n \neq 0$. Такий зазор вимірюється за допомогою щупа, тобто по нормалі.

Для розв'язку завдання зручніше розглядати зазор по початковій окружності j_w . Зачеплення буде безззорним, якщо $j_w = 0$.

Зазори по ПО і ЛЗ пов'язані залежністю $j_n = j_w \cdot \cos \alpha_w$. Ця залежність наведена тільки для довідки.

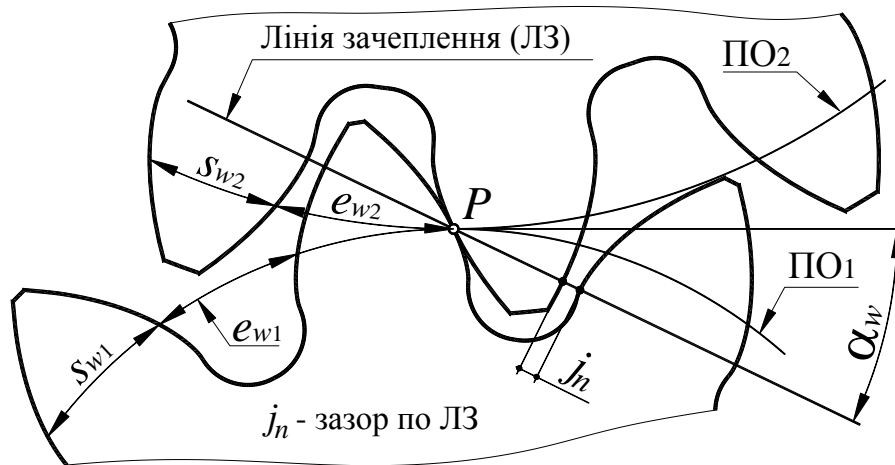


Рис. 4.29. Зачеплення пари коліс з боковим зазором j_n

Позначення на рис. 4.29 наступні:

s_{w1}, s_{w2} – товщини зубців коліс;

e_{w1}, e_{w2} – ширини западин коліс.

Крок зубчастого колеса $p_w = s_{w1} + e_{w1} = s_{w2} + e_{w2}$. При безззорному зачепленні товщина зубця одного колеса дорівнює ширині западини іншого, тобто $s_{w1} = e_{w2}$ і $s_{w2} = e_{w1}$. Підставивши у вираз $p_w = s_{w1} + e_{w1}$ рівність $s_{w2} = e_{w1}$, одержимо умову безззорного зачеплення у вигляді

$$p_w = s_{w1} + s_{w1}. \quad (4.42)$$

в). Товщина зубця колеса по ділильній окружності

Для колеса, виготовленого без зсуву, товщина зубця й ширина западини однакові, тобто $s = e = 0,5m\pi$.

Знайдемо товщину зубця колеса по ділильній окружності, виготовленого зі зсувом $x > 0$. Товщина зубця по ДО коліс буде дорівнювати ширині западини інструментальної рейки по початковій прямій. Розглянемо рис. 4.30, на якому показана ширина западини рейки по ДП і по ПП. Оскільки ПП перекочується по ДО без ковзання, то $s_k = e_p$, тобто $s = 0,5m\pi + 2\Delta$.

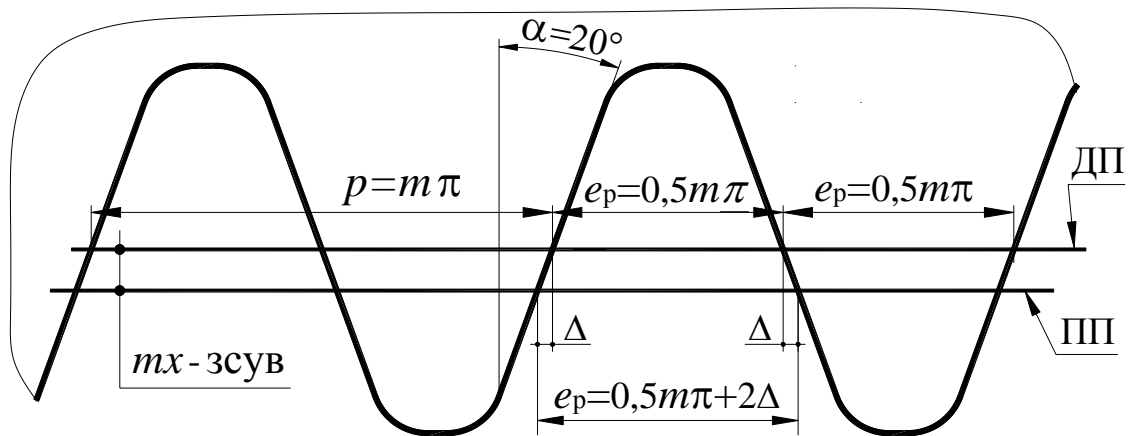


Рис. 4.30. До визначення товщини зубця по ДО

Із трикутника, у якого один з катетів рівний mx , а другий рівний Δ , знаходимо, що $\Delta = m\pi \cdot \tan \alpha$.

З урахуванням того, що при $x < 0$ знак при Δ зміниться на протилежний, одержимо

$$s = 0,5m\pi \pm 2mx \cdot \operatorname{tg} \alpha .$$

г). Товщина зубця колеса по окружності довільного радіуса

Для знаходження товщини зубця колеса по окружності довільного радіуса розглянемо рис. 4.31, на якому показана половина зубця і тільки евольвентна частина профілю.

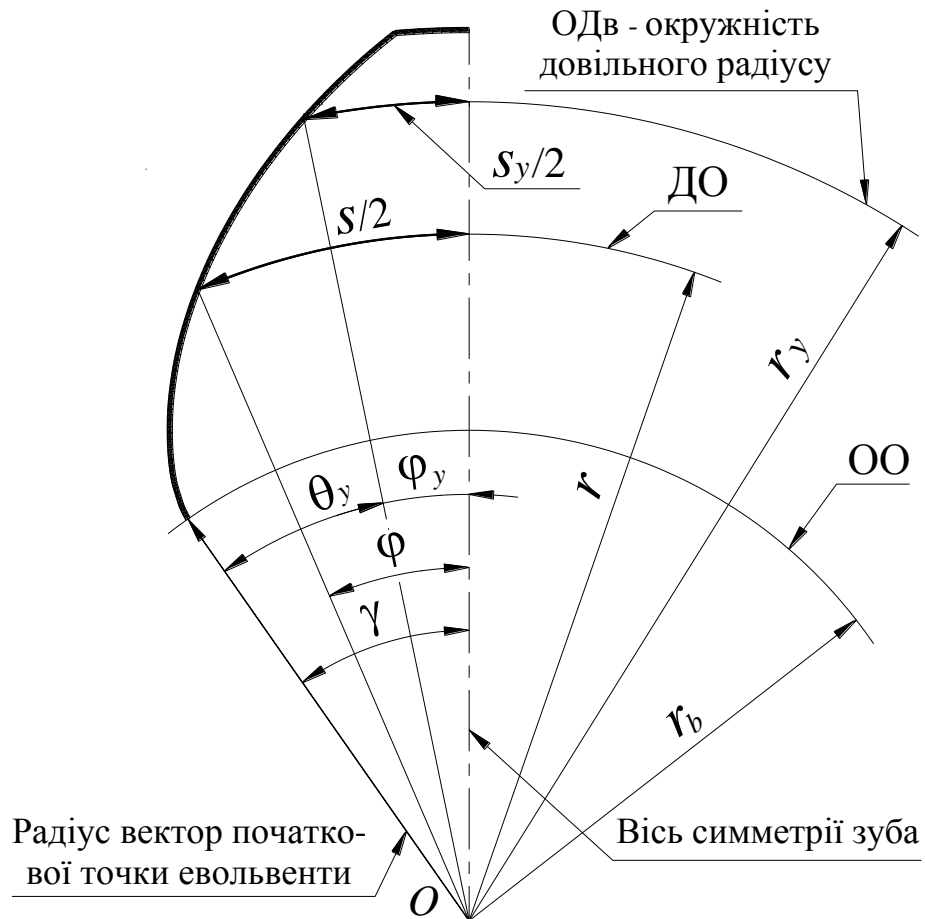


Рис. 4.31. До визначення товщини зубця по окружності довільного радіусу

Ряд позначень на рис. 4.31 уже відомі, тому зупинимося тільки на нових і особливо важливих:

ДО – ділильна окружність;

ОО – основна окружність;

$\theta = \text{tg}\alpha - \alpha$ – кутова координата точки евольвенти на ДО;

$\theta_y = \text{tg}\alpha_y - \alpha_y$ – кутова координата точки евольвенти на окружності довільного радіуса r_y ;

φ і φ_y – кути відповідно дуг $s/2$ і $s_y/2$.

З рис. 4.31 маємо, що

$$\gamma = \theta + \varphi = \theta_y + \varphi_y. \quad (4.43)$$

Довжини дуг і їх кути пов'язані залежностями

$$\begin{aligned} s/2 &= r \cdot \varphi; \\ s_y/2 &= r_y \cdot \varphi_y. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Із наведених виразів знаходимо кути φ і φ_y у вигляді

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{s}{2r} = \frac{s}{d}; \\ \varphi_y &= \frac{s_y}{2r_y} = \frac{s_y}{d_y}.\end{aligned}\quad (4.45)$$

Після підстановки до (4.43) значення кутів φ і φ_y отримаємо

$$\theta + \frac{s}{d} = \theta_y + \frac{s_y}{d_y}. \quad (4.46)$$

З (4.46) знаходимо товщину зубця по окружності довільного радіуса

$$s_y = d_y \left(\theta + \frac{s}{d} - \theta_y \right). \quad (4.47)$$

Вирази для величин в формулі (4.47) наступні:

$$\begin{aligned}S &= 0,5m\pi + 2mx \cdot \operatorname{tg}\alpha; \\ d &= mz; \\ \theta &= \operatorname{inv}\alpha; \\ \theta_y &= \operatorname{inv}\alpha_y.\end{aligned}\quad (4.48)$$

З (4.47) з урахуванням (4.48) товщина зубця по окружності довільного радіуса r_y дорівнює

$$s_y = d_y \left(\frac{0,5\pi + 2x \cdot \operatorname{tg}\alpha}{z} + \operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_y \right), \quad (4.49)$$

а для коліс, виготовлених без зсуву

$$s_y = d_y \left(\frac{0,5\pi}{z} + \operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_y \right). \quad (4.50)$$

д). Кут безззорного зачеплення

Як було встановлено вище, зачеплення буде безззорним, якщо $p_w = s_{w_1} + s_{w_2}$. Використовуючи (4.49), знайдемо товщину зубця колеса за початковою окружністю (ПО) у вигляді

$$s_w = z \cdot m_w \left(\frac{0,5\pi + 2x \cdot \operatorname{tg}\alpha}{z} + \operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_w \right)$$

або

$$s_w = m_w \cdot [0,5\pi + 2x \cdot \operatorname{tg}\alpha + z(\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_w)]. \quad (4.51)$$

Запишемо окремо значення s_w для коліс 1 і 2

$$s_{w_1} = m_w \cdot [0,5\pi + 2x_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha + z_1(\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_w)],$$

$$s_{w_2} = m_w \cdot [0,5\pi + 2x_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha + z_2(\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_w)].$$

Підставимо знайдені значення s_{w_1} і s_{w_2} в умову безззорного зачеплення, попередньо позначивши $z_1 + z_2 = z_\Sigma$, $x_1 + x_2 = x_\Sigma$, $p_w = m_w \cdot \pi$.

Після підстановки в умову безззорного зачеплення $p_w = s_{w_1} + s_{w_2}$ значень s_{w_1} і s_{w_2} отримаємо вираз

$$m_w \cdot \pi = m_w \cdot [\pi + 2x_\Sigma \operatorname{tg}\alpha + z_\Sigma(\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_w)]$$

або

$$\pi = [\pi + 2x_\Sigma \operatorname{tg}\alpha + z_\Sigma(\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_w)]. \quad (4.52)$$

З (4.52) маємо

$$\operatorname{inv}\alpha_w = \operatorname{inv}\alpha + 2 \frac{x_\Sigma}{z_\Sigma} \operatorname{tg}\alpha, \quad (4.53)$$

де α_w – кут безззорного зачеплення.

За кутом α_w легко знайти інволюту, але за інволютою $\operatorname{inv}\alpha_w$ визначити α_w значно складніше. Зазвичай використовують таблиці інвалютних функцій. Рекомендуємо емпіричну залежність, що забезпечує досить високу точність визначення α_w в інтервалі $\alpha_w = 16^\circ \div 30^\circ$, наступного вигляду:

$$\alpha_w \approx 78,6 \cdot (\operatorname{inv}\alpha_w)^{0,32}. \quad (4.54)$$

е). Міжосьова відстань безззорного зачеплення

При відомому куті зачеплення α_w і радіусах основних окружностей можемо знайти міжосьову відстань безззорного зачеплення a_w (див. рис. 4.32).

Позначення на рис. 4.32 наступні:

OO_1 , OO_2 – основні окружності;

PO_1 , PO_2 – початкові окружності;

a_w – міжосьова відстань безззорного зачеплення;

α_w – кут безззорного зачеплення;

Міжосьова відстань $a_w = O_1P + O_2P = r_{w1} + r_{w2}$.

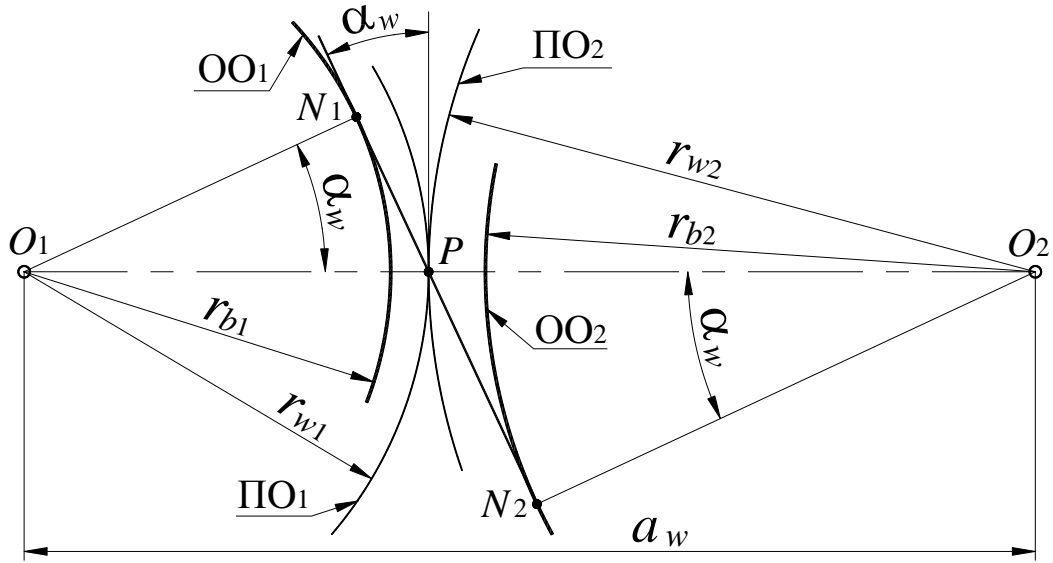


Рис. 4.32. До визначення міжосьової відстані беззазорного зачеплення

Враховуючи, що $r_{w1} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_w}$, $r_{w2} = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_w}$, отримаємо

$$a_w = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{\cos \alpha_w}. \quad (4.55)$$

Радіуси основних і ділительних окружностей пов'язані залежностями $r_{b1} = r_1 \cdot \cos \alpha$, $r_{b2} = r_2 \cdot \cos \alpha$, де r_1 і r_2 – радіуси ділительних окружностей, які на рис. 4.32 не показані.

Після підстановки в (4.55) значень r_{b1} і r_{b2} вираз для міжосьової відстані прийме вигляд

$$a_w = (r_1 + r_2) \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}. \quad (4.56)$$

Позначимо $a = (r_1 + r_2)$ як ділительну міжосьову відстань, тоді

$$a_w = a \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}. \quad (4.57)$$

ж). Зрівняльне зміщення

Якщо колеса, виготовлені зі зсувами, встановити з міжцентровою відстанню $a'_w = a + m \cdot x_\Sigma$, то радіальні зазори будуть рівні $c = c^* \cdot m = 0,25 \cdot m$, але буде й боковий зазор. Для усунення зазору колеса необхідно зблизити до міжосьової відстані беззазорного зачеплення $a_w = a + m \cdot y$. Таким чином, коле-

са зближуємо на величину $a'_w - a_w = m \cdot x_\Sigma - m \cdot y = m \cdot \Delta y$, яка отримала назву зрівняльне зміщення.

У наведеному виразі $x_\Sigma - y = \Delta y$ – коефіцієнт зрівняльного зміщення.

Зблизивши колеса на величину $m \cdot \Delta y$, ми тим самим на таку ж величину зменшили радіальний зазор. Для відновлення радіального зазору необхідно на таку ж величину зменшити висоту голівок зубців, зменшивши радіуси кіл вершин на величину $m \cdot \Delta y$.

При нарізуванні коліс зі зміщенням $m \cdot x$ на таку ж величину змінюються і радіуси окружностей западин. У результаті колеса матимуть наступні діаметри окружностей вершин і западин:

$$d_{ai} = m \cdot (z_i + 2h_a^* + 2x_i - 2\Delta y), \quad (4.58)$$

$$d_{fi} = m \cdot (z_i - 2h_a^* - 2c^* + 2x_i). \quad (4.59)$$

4.5. Косозубі колеса

а). Загальні відомості

Прямозубі колеса мають ряд недоліків. Основний недолік – це малий коефіцієнт перекриття, який завжди менше двох, причому в зачепленні може перебувати або одна, або дві пари зубців. Це означає, що все навантаження передається або однією, або двома парами зубців. На рис. 4.33 ліворуч показано момент входу в зачеплення заштрихованої пари зубців (позначені як 2_1 і 2_2), а праворуч – момент виходу із зачеплення цієї пари.

В момент входу в контакт пари 2_1 і 2_2 в контакті перебуває пара зубців, позначених як 1_1 і 1_2 . Таким чином, у момент входу в зачеплення завжди в зачепленні перебуває дві пари зубців. Точно так само, у момент виходу із зачеплення у зачепленні перебуває дві пари зубців (див. рис. 4.33 праворуч). В області полюса P розташовується область однопарного зачеплення. Через похибки профілю і кроку, а також через навантаження вхід в зачеплення супроводжується ударом. Перед входом в зачеплення пари зубців 2_1 і 2_2 в зачепленні знаходилась тільки пара 1_1 і 1_2 (контакт в точці k_1). Навантаженість зубців цієї пари призводить в якійсь мірі до зміни кроків між зубцями 1_2 і 2_2 , а також між зубцями 1_1 і 2_1 , і вхід в зачеплення пари 2_1 і 2_2 навіть без урахування можливих геометричних похибок профілів і кроків буде ударним.

Негативний вплив описаного явища посилюється ще і тим, що зубець прямозубого колеса входить в зачеплення відразу по всій довжині. В результаті доводиться знижувати окружну швидкість, а значить і потужність.

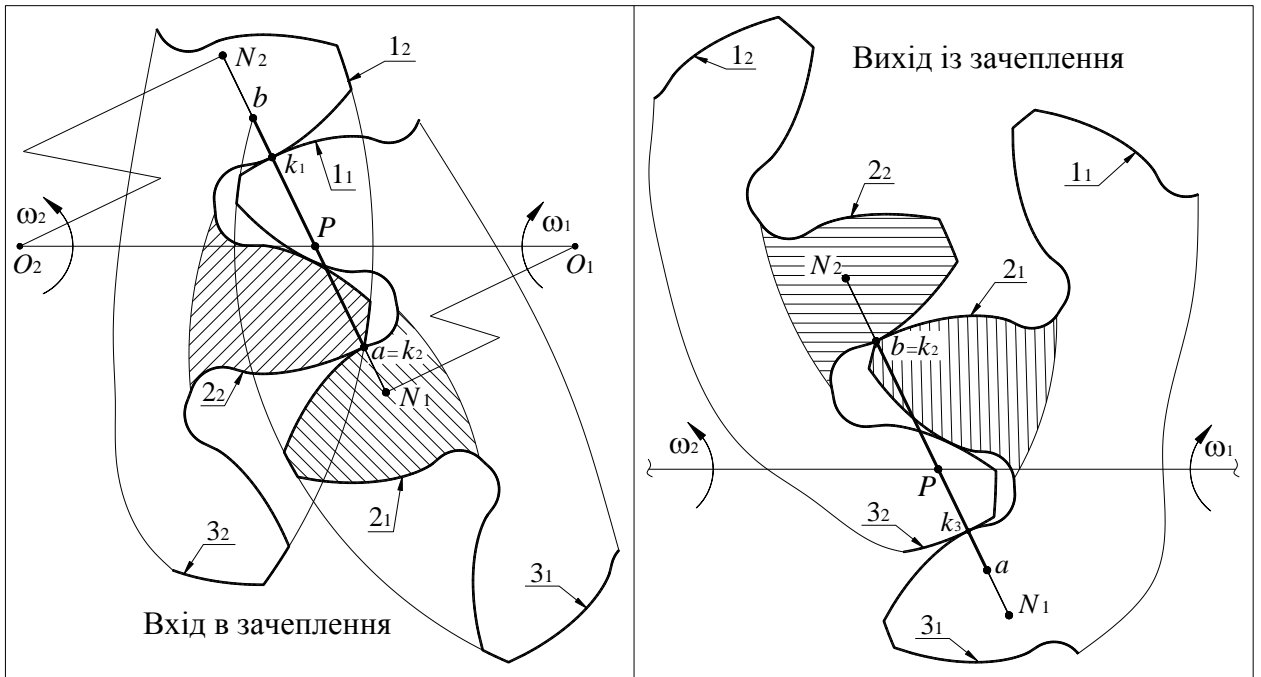


Рис. 4.33. Вхід і вихід з зачеплення пари зубців прямозубих коліс

Раніше ми завжди розглядали плоский перетин і відповідно оперували такими поняттями як точка контакту, лінія зачеплення, основна й ділильна окружності і т. п. Зубець зубчастого колеса має довжину й, коли ми говоримо про взаємодію пари зубців, в цьому випадку ми повинні застосовувати наступні поняття: лінія контакту зубців, площина зачеплення, ділильний циліндр, основний циліндр і т. п.

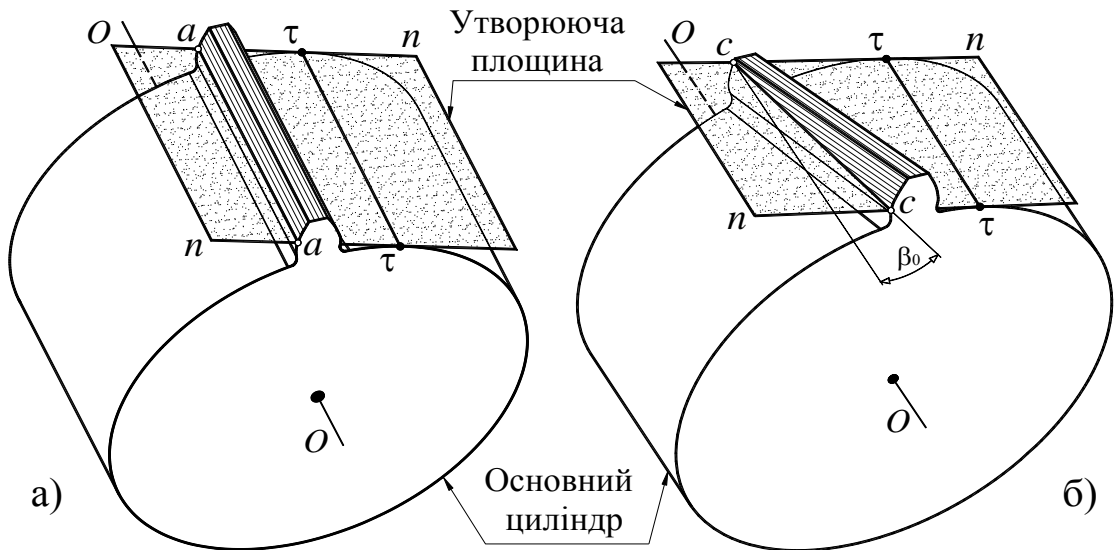


Рис. 4.34. Утворення бічних поверхонь зубців циліндричних коліс

Використовуючи згадані поняття, розглянемо, як утворюються бічні поверхні зубців прямозубого й косозубого коліс, і порівняємо їх.

Розглянемо рис. 4.34.

З рисунка зрозумілі відмінності в утворенні бокових поверхонь зубців прямозубого (рис. 4.34, а) і косозубого (рис. 4.34, б). В обох випадках ми по основному циліндру перекочуємо утворюючу площину mn . Для створення бічної поверхні зубця прямозубого колеса лінія aa на площині mn паралельна утворюючим основного циліндра (ОО), а для косозубого колеса лінія cc знаходиться під кутом β_0 до утворюючої ОО. Загалом зубець косозубого колеса є гвинтовим.

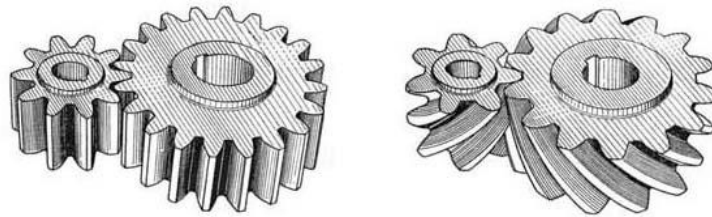


Рис. 4.35. Пари прямозубих і косозубих коліс

Для порівняння зачеплень пари прямозубих і пари косозубих коліс наведено рис. 4.35. З рисунку видно, що в будь-якому перетині площиною, перпендикулярною осі прямозубого колеса картина зачеплення буде однією й тією ж на відміну від перетинів пари косозубих коліс – усі перетини будуть відрізнятися за фазою зачеплення. Зубець прямозубого колеса у всіх перетинах одночасно входить і виходить із зачеплення, при цьому лінія контакту зубців рівна довжині зубця і є паралельною осі колеса. Довжина лінії контакту зубця косозубого колеса в момент входу в зачеплення дорівнює нулю, тобто контакт є точковим, надалі довжина лінії контакту плавно збільшується, а потім плавно зменшується до нуля в момент виходу із зачеплення (контакт у точці). При цьому лінія контакту утворює з віссю колеса кут β_0 . Таким чином зубець косозубого колеса в зачепленні перебуває більш тривалий час і в зачепленні одночасно перебуває як мінімум дві пари зубців.

Це наочно видно з рис. 4.36. Зубець прямозубого колеса перебуває в зачепленні 4 умовних відрізків часу, а зубець косозубого колеса за інших рівних умов – 8 відрізків часу.

Слід зазначити, що косозубі колеса нарізають тим же інструментом і на тих же верстатах, що й прямозубі.

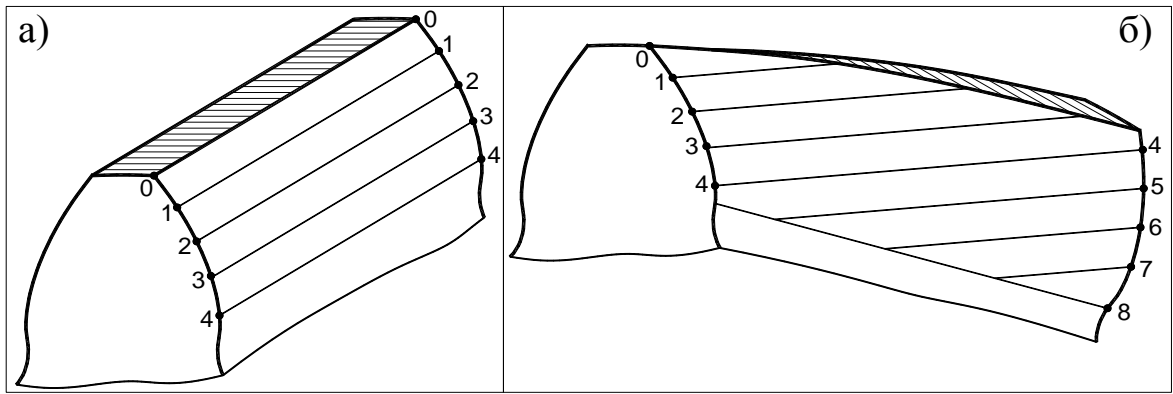


Рис. 4.36. Положення ліній контакту зубців прямозубих і косозубих коліс

б). Геометричні параметри косозубого колеса та зачеплення

На рис. 4.37 показане спрощене (тільки ділительні циліндри), але достатнє для пояснення матеріалу, зображення пари косозубих коліс.

Позначення на рис. 4.37 наступні:

d_1, d_2 – діаметри ділительних циліндрів (ДЦ);

a – міжосьова відстань;

p_t, p_n – відповідно торцевий і нормальний кроки;

b – ширина зубчастого колеса;

β – кут нахилу зубця;

s_t – додаткова дуга перекриття.

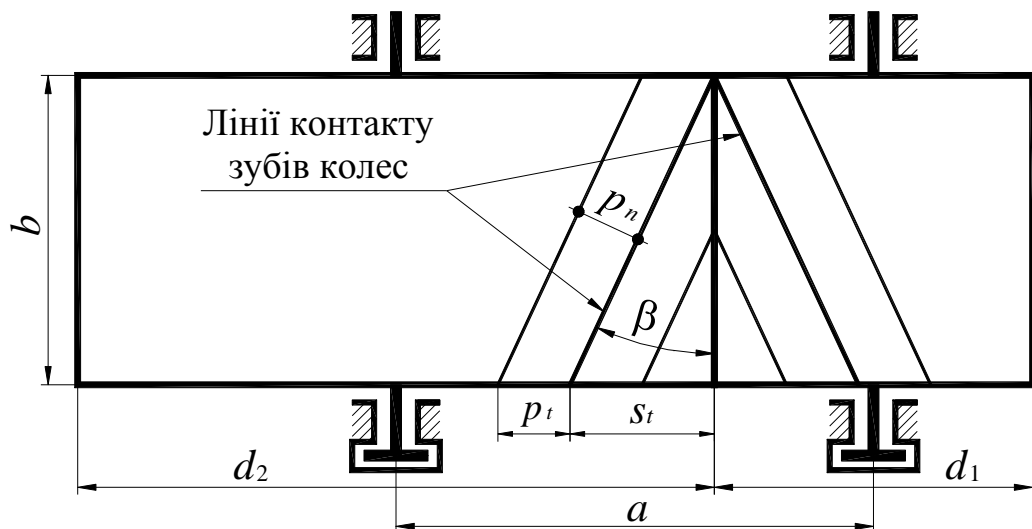


Рис. 4.37. Геометричні параметри косозубого колеса та зачеплення

Торцевий і нормальний кроки визначаються за залежностями

$$\begin{aligned} p_t &= m_t \cdot \pi; \\ p_n &= m_n \cdot \pi, \end{aligned} \quad (4.60)$$

де m_n і m_t – нормальний і торцевий модулі.

Стандартним модуль є m_n (модуль, який при розгляді прямозубих коліс позначався як m).

З рис. 4.37 зрозумілий зв'язок між кроками p_t і p_n , а значить і між модулями

$$\begin{aligned} p_n &= p_t \cdot \cos \beta; \\ m_n &= m_t \cdot \cos \beta. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Діаметри ділительних окружностей при цьому визначаються за залежностями

$$\begin{aligned} d_1 &= m_t \cdot z_1; \\ d_2 &= m_t \cdot z_2. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Міжосьова відстань

$$a = 0,5 \cdot (d_1 + d_2) = 0,5 \cdot m_t (z_1 + z_2) = \frac{0,5 \cdot m_n (z_1 + z_2)}{\cos \beta}. \quad (4.63)$$

З (4.63) бачимо, що для пари косозубих коліс з'явилася додаткова можливість управляти величиною a , змінюючи β .

в). Коефіцієнт перекриття косозубих коліс

Як відзначалось вище, зубець косозубого колеса перебуває в зачепленні більш тривалий час. Це означає, що крім торцевого перекриття (як у прямозубих коліс) є додаткове перекриття, що залежить від кута β , тобто $\varepsilon_\Sigma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$. Тут ε_α – коефіцієнт торцевого перекриття (раніше позначався без індексу). Коефіцієнт додаткового (осьового) перекриття буде дорівнювати відношенню додаткової дуги зачеплення s_t (див. рис. 4.37) до торцевого кроку.

З рис. 4.37 додаткова дуга перекриття може бути знайдена як

$$s_t = b \cdot \tan \beta. \quad (4.64)$$

Тоді коефіцієнт додаткового перекриття буде дорівнювати

$$\varepsilon_\beta = \frac{s_t}{p_t} = \frac{b \cdot \operatorname{tg} \beta}{p_n / \cos \beta} = \frac{b \cdot \sin \beta}{p_n} = \frac{b \cdot \sin \beta}{m_n \cdot \pi}. \quad (4.65)$$

Відповідно коефіцієнт перекриття ε_Σ з урахуванням значення ε_β буде

$$\varepsilon_{\Sigma} = \frac{b \cdot \sin \beta}{m_n \cdot \pi} + \frac{ab}{p_b} = \frac{b \cdot \sin \beta}{m_n \cdot \pi} + \frac{ab}{p \cdot \cos \alpha} = \frac{b \cdot \sin \beta}{m_n \cdot \pi} + \frac{ab}{m_n \cdot \pi \cdot \cos \alpha}. \quad (4.66)$$

г). Еквівалентне число зубців косозубого колеса

Еквівалентним числом зубців косозубого колеса називається число зубців такого прямозубого колеса, у якого профіль зубця такий же, як у нормальному перетині зубця косозубого колеса.

На рис. 4.38 показано ділительний циліндр (ДЦ) колеса і один зубець. В правій частині рисунка показано перетин I-I, отриманий при розсіканні зубця нормальною площиною. У перетині площиною mn ділительного циліндра одержали еліпс із напівосями

$$\begin{aligned} a &= r; \\ b &= r / \cos \beta. \end{aligned} \quad (4.67)$$

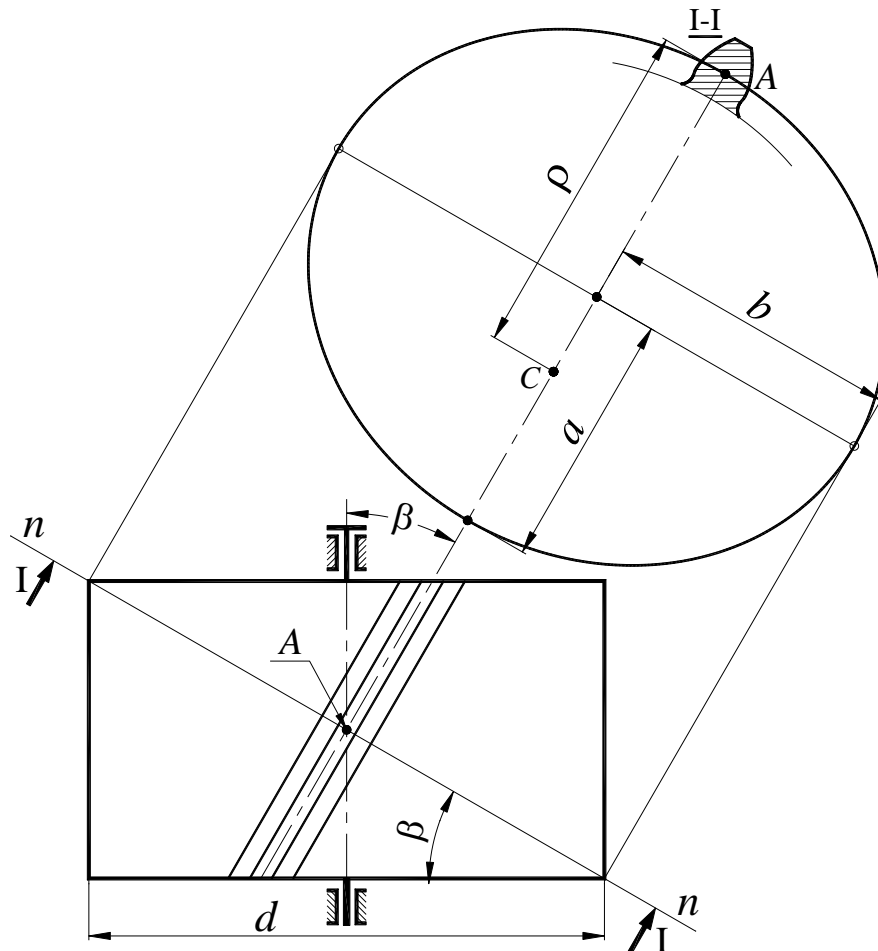


Рис. 4.38. До визначення еквівалентного числа зубців косозубого колеса

На рис. 4.38 показано також і перетин зубця. На цьому рисунку точка А – це точка на ділительному циліндрі посередині зубця. Очевидно, що такий же

профіль буде у такого прямозубого колеса, у якого радіус ділительного циліндра дорівнює радіусу кривизни еліпса в точці A , тобто

$$r_v = \rho, \quad (4.68)$$

де r_v – радіус ділительного циліндра еквівалентного прямозубого колеса, що визначається за залежністю

$$r_v = 0,5z_v \cdot m = 0,5z_v \cdot m_n. \quad (4.69)$$

Величина радіуса кривизни еліпса ρ буде дорівнювати

$$\rho = \frac{b^2}{a} = \frac{(r / \cos \beta)^2}{r} = r / \cos^2 \beta = 0,5m_t \cdot z / \cos^2 \beta = 0,5m_n \cdot z / \cos^3 \beta. \quad (4.70)$$

Після підстановки в (4.68) значення виразів (4.69) і (4.70). Одержимо

$$\begin{aligned} 0,5z_v \cdot m_n &= 0,5m_n \cdot z / \cos^3 \beta; \\ z_v &= z / \cos^3 \beta. \end{aligned} \quad (4.71)$$

д). Сили в зачепленні косозубих циліндричних коліс

На рис. 4.39 показано ділительний циліндр тільки колеса 2. Колесо 1 на рисунку не показане. Будемо розглядати силу впливу зубця колеса 1 на зубець колеса 2. Для спрощення індекс « $_{12}$ » ставити не будемо, маючи на увазі, наприклад, що $F_{n_{12}} = F_n$.

Сила взаємодії зубців спрямована по нормалі до поверхонь, тобто по площині зачеплення. В дійсності згадана сила є розподіленою по лінії контакту зубців, ми її замінитимемо зосередженою силою.

Розсічемо зону зачеплення нормальною площиною nn . Праворуч угорі показаний перетин $n-n$, на якому зубець колеса 2 заштрихований. Будемо розглядати сили дії зубця 1 на зубець 2, вилучивши для спрощення індекс « $_{12}$ ». Повна сила F_n спрямована по нормалі до профілів, тобто по лінії зачеплення. Силу F_n розкладаємо на дві складові, одна з яких спрямована перпендикулярно лінії контакту зубців і осі колеса – це радіальна сила F_r (на перетині $n-n$ вона паралельна лінії контакту, оскільки цей перетин повернений на 90 градусів). Друга сила – сила F_t' , що спрямована перпендикулярно силі F_r .

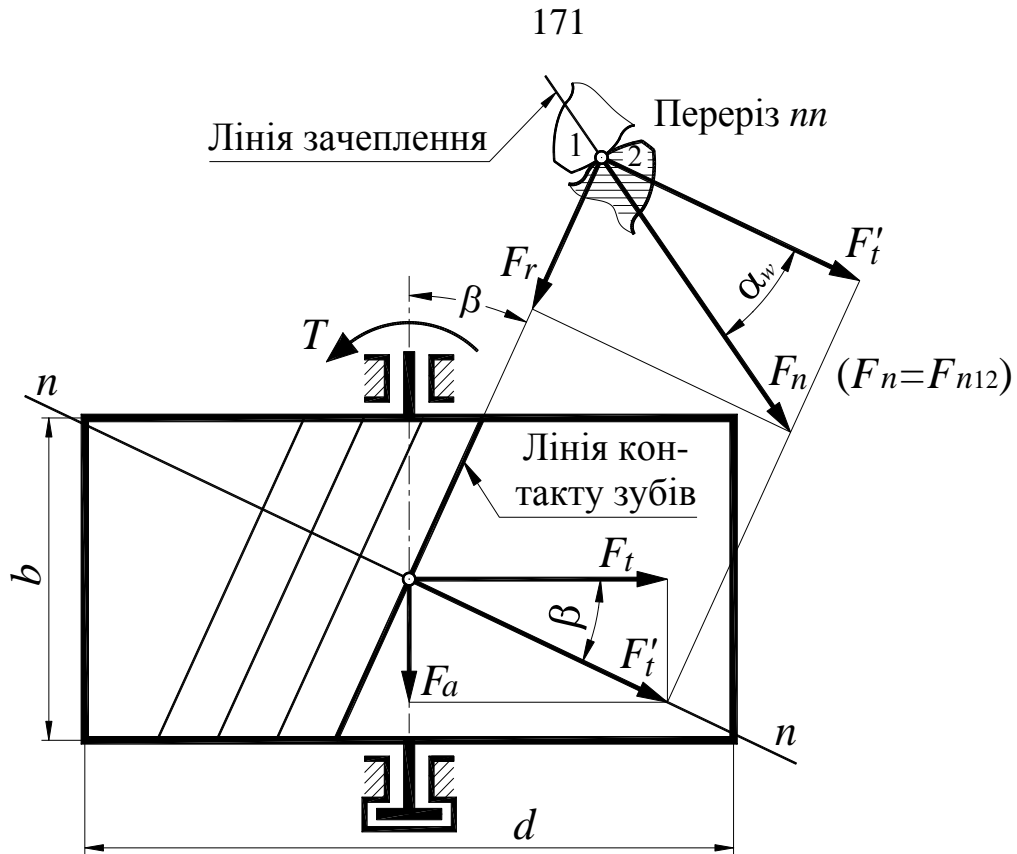


Рис. 4.39. До визначення сил в зачепленні циліндричних коліс

Визначення сил починаємо з окружної сили, що є єдиною корисною силою, оскільки тільки вона виконує корисну роботу. Окружна сила визначається за залежністю

$$F_t = 2T / d. \quad (4.72)$$

З рис. 4.39 знаходимо силу F'_t у вигляді

$$F'_t = F_t / \cos \beta. \quad (4.73)$$

Осьова сила з того ж рисунка буде

$$F_a = F_t \cdot \tan \beta. \quad (4.74)$$

Відзначимо, що осьова сила F_a залежить від тангенса кута нахилу зубця, тобто зі збільшенням кута β відбувається інтенсивне зростання F_a . Тому зазвичай значення цього кута перебуває в діапазоні від 8 до 20 градусів. Менше 8 градусів не приймають, оскільки ефект від застосування стає незначним.

З верхньої частини рис. 4.39 знаходимо радіальну силу у вигляді

$$F_r = F'_t \cdot \tan \alpha_w = \frac{F_t \cdot \tan \alpha_w}{\cos \beta}. \quad (4.75)$$

Повна сила тиску зубця на зубець дорівнює (див. рис. 4.39)

$$F_n = \frac{F_t'}{\cos \alpha_w} = \frac{F_t}{\cos \beta \cdot \cos \alpha_w}. \quad (4.76)$$

4.6. Конічні колеса

Конічні колеса застосовуються для передач із осями валів, що перетинаються. Кут перетинання осей валів може бути будь-яким, але зазвичай цей кут рівний 90° . Конічні колеса складніші у виготовленні, монтажі й експлуатації. За інших рівних умов у порівнянні із циліндричними колесами вони мають меншу навантажувальну здатність. Конічні колеса виготовляють із прямим, косим зубцем і із криволінійною формою зубця (частіше застосовується кругова форма).

На рис. 4.40 показані можливі варіанти виконання конічних зубчастих коліс:

- 1 – прямозубе колесо;
- 2 – косозубе колесо;
- 3 – колесо із круговою формою зубця.

Косозубе колесо та колесо із круговою формою зубця серед іншого характеризуються кутами нахилу β .

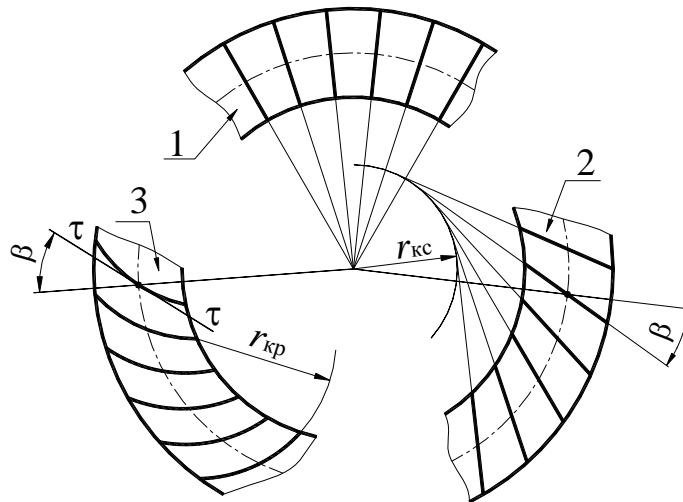


Рис. 4.40. Форми зубців конічних коліс

Бічна поверхня прямозубого конічного колеса є слід прямої лінії площини при її перекочуванні без ковзання по основному конусу (ОК). При цьому зазначена пряма проходить через вершину ОК. Із цього випливає, що евольвента конічного колеса не плоска крива, а крива на сфері (див. рис. 4.41).

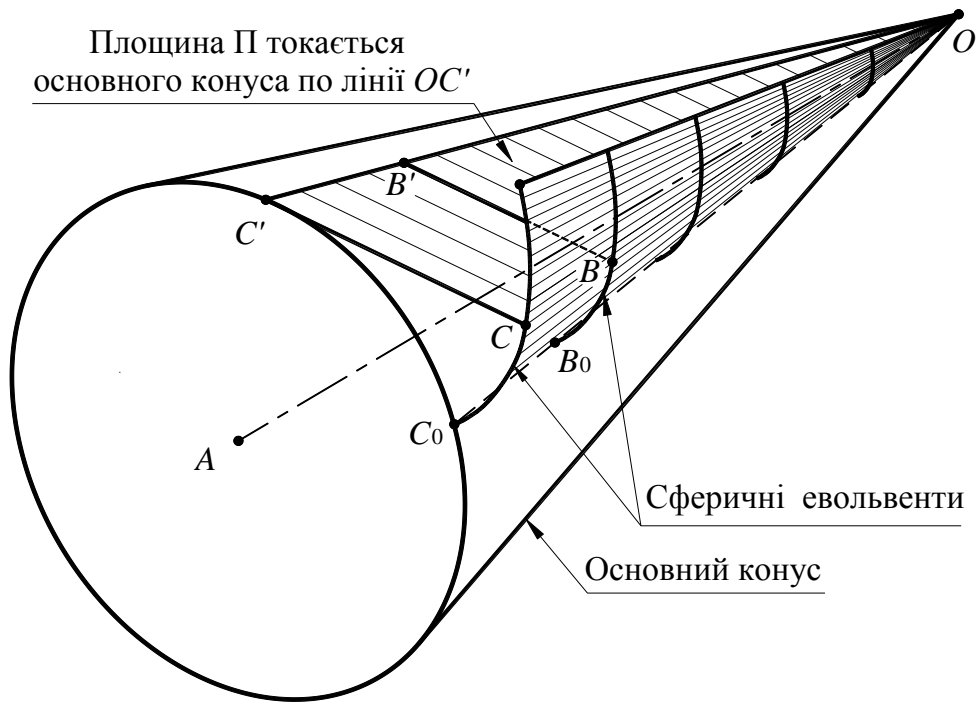


Рис. 4.41. Утворення бокової поверхні зубця конічного колеса

У початковий момент часу площина Π торкається ОК по лінії OC_0 , а в даний момент площина Π торкається ОК по лінії OC' . При цьому точки лінії дотику площини Π до ОК у початковий момент часу (точки C_0 і B_0) у даний момент зайняли положення відповідно C і B , а їх сліди утворили сферичні евольвенти. Із цього випливає, що картину теоретично правильного евольвентного конічного зачеплення необхідно розглядати в перетині сферою із центром у вершині конуса, що не виправдано складно. Нижче буде показано, що зубчастий вінець на сфері на практиці замінюється вінцем на конусі, який називається додатковим конусом.

На рис. 4.42 показані зубчасті вінці конічних коліс у перетині сферою із центром у точці O . Оскільки ширина зубчастих вінців h порівняно невелика, то перетин сферою з достатньою точністю можна замінити вінцями в перетині додатковими конусами (на рис. 4.42 утворюючі додаткових конусів показані пунктирною лінією). Враховуючи, що конус розвертається на площині, така заміна суттєво спрощує визначення геометричних параметрів зубця.

Розміри зубця у будь-якому конкретному перетині пропорційні відстані від вершини конуса до розглянутого перетину. Довжину зубця зазвичай приймають не більш ніж $1/3$ від довжини утворюючої ділильного конуса (ДК).

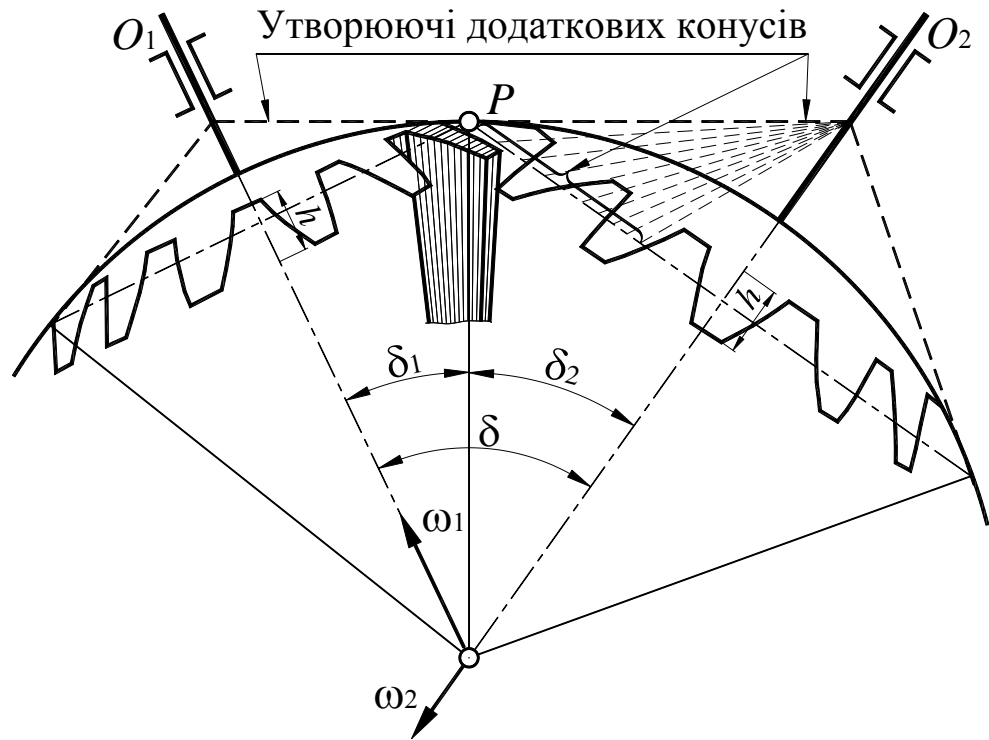


Рис. 4.42. Зубчасті вінці на сфері

a). Геометричні параметри кінцевого колеса

Є три характерні перетини зубців кінцевого колеса: зовнішній, середній та внутрішній. Для позначення цих перетинів стандартом установлені наступні індекси:

- 1) зовнішній перетин – індекс e ;
- 2) середній перетин – індекс m ;
- 3) внутрішній перетин – індекс i .

Для позначення й контролю геометричних параметрів кінцевого колеса використовують зовнішній торцевий перетин (найбільш зручно). Для силових розрахунків використовують середній перетин. Крім зазначених вище індексів застосовуються також індекси, які встановлені для циліндричних коліс. Нагадаємо їх:

a – індекс, передбачений для позначення параметрів ОВр або голівки зубця;

f – індекс, передбачений для позначення параметрів ОЗп або ніжки зубця;

b – індекс, передбачений для позначення параметрів ОО колеса;

w – індекс, передбачений для позначення параметрів початкової окружності (ПО).

Для позначення параметрів ділільної окружності (ДО) індекси не передбачені. Наприклад, позначення d , α , s , e , p і т. п. не мають індексів.

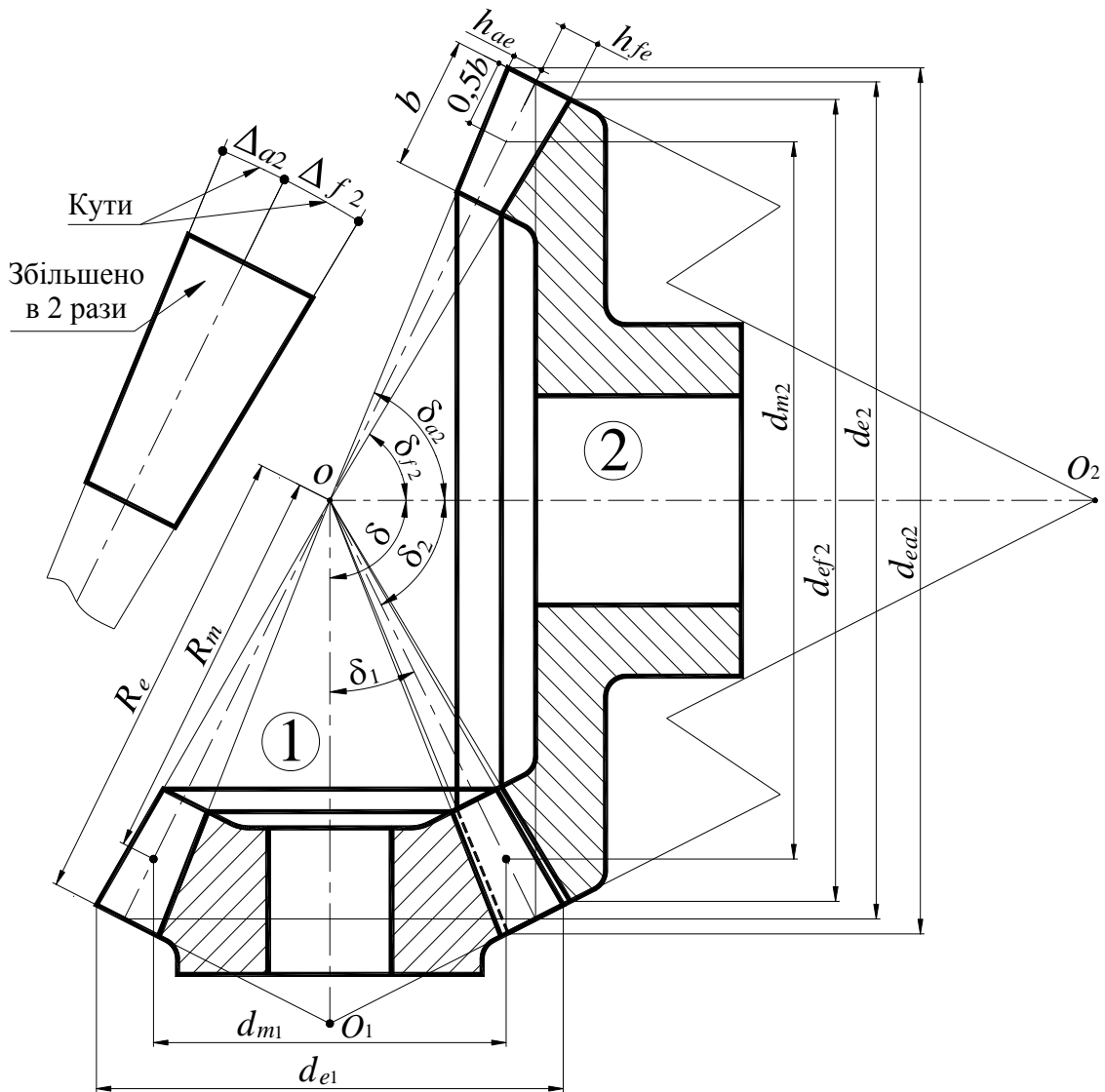


Рис. 4.43. Геометричні параметри конічного колеса

Таким чином, для позначення геометричних параметрів конічного колеса використовується дві групи індексів, одна з яких вказує на перетин, а інша – на окружність (вершин, западин і т. п.). На рис. 4.43 показані геометричні параметри конічного колеса, які з урахуванням викладеного вище не вимагають додаткових коментарів.

Залежно від розглянутого перетину застосовуються відповідні модулі m_e , m_m або m_i . Як ми вже відзначали, геометричні параметри вказують для зовнішнього торцевого перетину (для зручності), для якого застосовується модуль m_e . Для косозубих коліс і коліс із круговою формою зубця розрізняють нормальний модуль m_{en} і торцевий m_{et} . Для прямозубих коліс $m_e = m_{en}$. Аналогічно застосовуються торцевий і нормальний модулі і для середнього перетину (для не прямозубих коліс), нормальний модуль позначається m_{mn} , торцевий – m_{mt} . Слід відзначити, що іноді при позначенні параметрів серед-

нього перетину індекс « m » опускають, маючи на увазі, що $m_m = m$, $d_m = d$, $R_m = R$ і т. п.

На рис. 4.43, як приклад позначення, показані практично всі розміри для колеса 2. Для колеса 1 зазначені тільки діаметр окружності вершин зовнішнього торцевого перетину d_{e_1} і діаметр ділильної окружності в середньому перетині d_{m_1} , а також кут ділильного конуса δ_1 . Для кожного з коліс пари висота голівки й висота ніжки, як і для циліндричних коліс знаходяться за залежностями

$$\begin{aligned} h_{ae} &= m_e \cdot h_a^* = 1,0 \cdot m_e; \\ h_{fe} &= m_e \cdot (h_a^* + c^*) = 1,25 \cdot m_e. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Як приклад, наведемо визначення деяких розмірів для колеса 2.

Діаметр окружності вершин для зовнішнього торцевого перетину

$$\begin{aligned} d_{ea_2} &= d_{e_2} + h_{ae} \cdot \cos \delta_{a_2}; \\ \delta_{a_2} &= \delta_2 + \Delta_{a_2}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

де $\Delta_{a_2} = \arctg(h_a / R_e)$.

Діаметр окружності западин для зовнішнього торцевого перетину

$$\begin{aligned} d_{ef_2} &= d_{e_2} - h_{fe} \cdot \cos \delta_{f_2}; \\ \delta_{f_2} &= \delta_2 - \Delta_{f_2}, \end{aligned} \quad (4.79)$$

де $\Delta_{e_2} = \arctg(h_f / R_e)$.

На рисунку R_e і R_m – це відповідно зовнішня й середня конусні відстані, що між собою пов'язані залежністю

$$R_m = R_e - 0,5 \cdot b, \quad (4.80)$$

звідки можна отримати зв'язок між модулями

$$\frac{m_m}{m_e} = \frac{R_m}{R_e} = \frac{R_e - 0,5 \cdot b}{R_e}. \quad (4.81)$$

З (4.81) модуль для середнього перетину буде рівний

$$m_m = m_e \cdot \frac{R_e - 0,5 \cdot b}{R_e}. \quad (4.82)$$

Кут між осями валів дорівнює сумі кутів при вершинах ділильних конусів

$$\delta = \delta_1 + \delta_2. \quad (4.83)$$

Для конічних коліс застосовується поняття сумарного числа зубців z_{Σ} або числа зубців плоского колеса. Значення z_{Σ} може бути не цілим числом і особливого фізичного змісту не має.

Зовнішню конусну відстань можна виразити в такому вигляді:
 $2R_e = \sqrt{d_{e_1}^2 + d_{e_2}^2} = \sqrt{(m_e \cdot z_1)^2 + (m_e \cdot z_2)^2} = m_e \cdot \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, тоді $R_e = 0,5m_e \cdot z_{\Sigma}$, де $z_{\Sigma} = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$. Тут R_e можна розглядати як еквівалент міжосьової відстані для циліндричних коліс $a = 0,5m \cdot z_{\Sigma}$.

б). Додаткові конуси. Еквівалентне число зубців конічного колеса

Як ми вже відзначали вище, з метою спрощення визначення геометричних параметрів, а також спрощення профілювання зубців конічного колеса, вінці на сфері замінюють вінцями на конусах, які одержали назву додаткових конусів. Утворюючі додаткових конусів перпендикулярні утворюючим ділільних конусів (див. рис. 4.44).

На рис. 4.44 показані тільки ті розміри, які необхідні при розгляді даного питання. Позначені утворюючі ділільних і додаткових конусів. Збільшений фрагмент I наочно показує, наскільки мало відрізняються вінці колеса в перетині сферою (позначення a , суцільно лінія) і в перетині конусом (позначення b , пунктирна лінія). На фрагменті I практично не помітна різниця між перетинами a і b , тому з додатковим збільшенням в 5 разів (тобто загальне збільшення в 20 разів) показано фрагмент II, на якому показані максимальне відхилення перерізів Δ і радіальний зазор $c = c^* \cdot m = 0,25m$.

Еквівалентним числом зубців конічного колеса є число зубців такого циліндричного колеса, у якого профіль зубця такий же, як у зовнішньому торцевому перетині конічного колеса.

Розгортка додаткових конусів – це зубчасті сектори циліндричних коліс. Радіуси цих секторів і є радіусами еквівалентних циліндричних коліс.

З рис. 4.44 радіуси зубчастих секторів рівні

$$r_{ve_1} = \frac{r_{e_1}}{\cos \delta_1};$$

$$r_{ve_2} = \frac{r_{e_2}}{\cos \delta_2}.$$
(4.84)

Виразимо радіуси через числа зубців і модулі, отримаємо

$$\begin{aligned}
 r_{ve_1} &= 0,5z_{v_1} \cdot m; \\
 r_{ve_2} &= 0,5z_{v_2} \cdot m; \\
 r_{e_1} &= 0,5z_1 \cdot m_e; \\
 r_{e_2} &= 0,5z_2 \cdot m_e.
 \end{aligned}
 \tag{4.85}$$

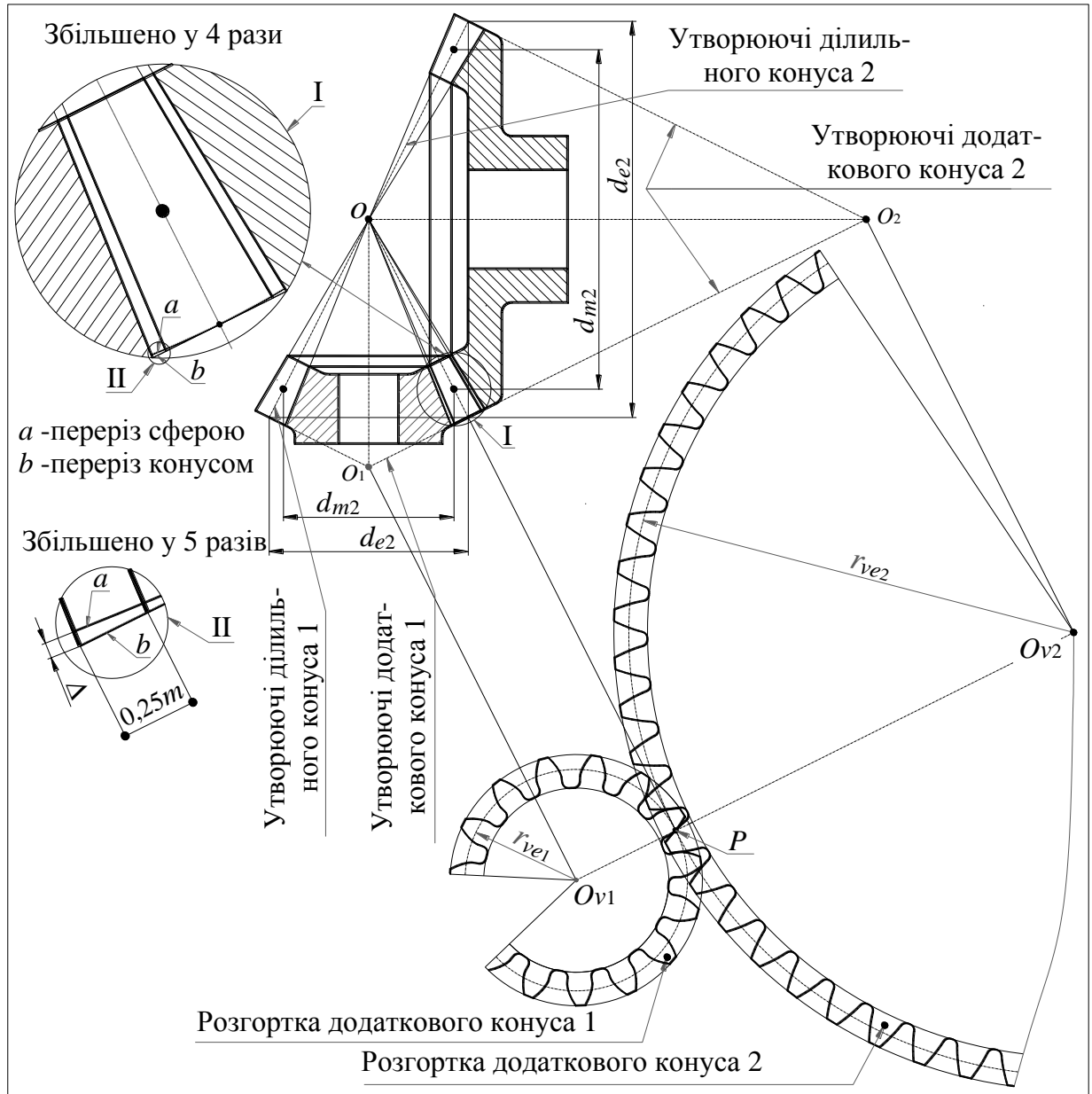


Рис. 4.44. Розгортка додаткових конусів

Як ми вже відзначали вище, торцевий модуль прямозубого конічного колеса – це нормальний модуль, тобто у виразі (4.85) $m_e = m$. Після підстановки (4.85) в (4.84), одержимо

$$z_{v_1} = \frac{z_1}{\cos \delta_1};$$

$$z_{v_2} = \frac{z_2}{\cos \delta_2}.$$
(4.86)

в). Сили в зачепленні прямозубих конічних коліс

На рис. 4.45 показана пара конічних коліс із прямими зубцями. Будемо розглядати сили дії колеса 1 на колесо 2. Для зручності при позначенні сил індекс «₁₂» вилучимо. Так само як і для циліндричних коліс, зону зачеплення через середину зубця розсікаємо нормальною площиною *nn*, оскільки повна сила взаємодії зубців спрямована по нормалі до поверхонь зубців. Праворуч угорі показаний перетин *n-n*. Повну силу F_n (направлена уздовж ЛЗ) розкладаємо на складові, одна з яких F_t спрямована перпендикулярно площині кресленика (на перетині *n-n* сила F_t спрямована уздовж лінії контакту зубців, оскільки перетин *n-n* повернутий на 90°), а інша F_{ra} спрямована перпендикулярно силі F_t . Серед діючих сил єдиною корисною силою є окружна.

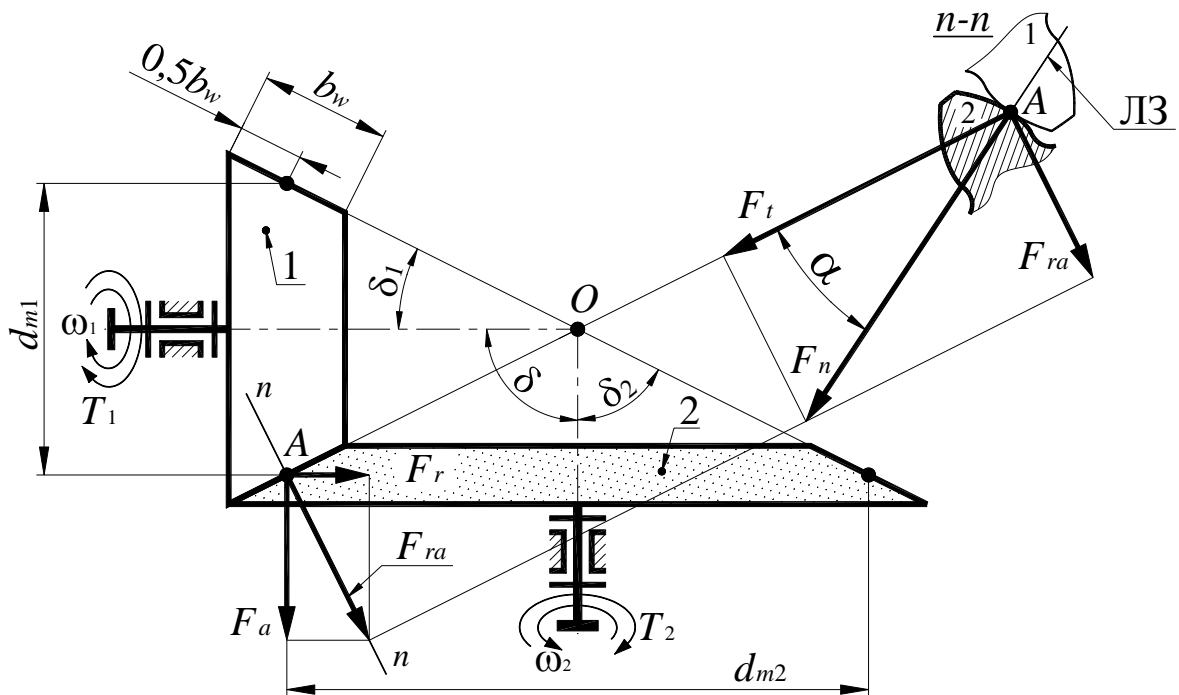


Рис. 4.45. Сили в зачепленні конічних коліс

Визначення сил починаємо з окружної сили F_t , її величина визначається залежністю

$$F_t = \frac{2 \cdot T_1}{d_{m_1}} = \frac{2 \cdot T_2}{d_{m_2}}.$$
(4.87)

Повна сила тиску зубця на зубець із зображення перетину $n-n$ на рис. 4.45 рівна

$$F_n = F_t / \cos \alpha. \quad (4.88)$$

Друга складова повної сили F_n (сила F_{ra}) з того ж рисунка рівна

$$F_{ra} = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.89)$$

Переносимо силу F_{ra} в точку A , що позначена на нижній частині рис. 4.45, і розкладаємо на дві складові: осьову F_a і радіальну F_r .

Осьова сила рівна

$$F_a = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \delta_2. \quad (4.90)$$

Радіальна сила визначається за залежністю

$$F_r = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \delta_2. \quad (4.91)$$

Відзначимо, що осьова сила для колеса 2 – це радіальна сила для колеса 1 і навпаки, тобто $F_{r12} = F_{a21}$; $F_{a12} = F_{r21}$.

г). Сили в зачепленні не прямозубих конічних коліс

Перед тим як безпосередньо приступимо до визначення сил в зачепленні не прямозубих конічних коліс розглянемо рис. 4.46.

Позначення на рис. 4.46 наступні:

ДК₁ і ДК₂ – ділильні конуси;

ОК₁ і ОК₂ – основні конуси;

α_w – кут зачеплення;

β – кут нахилу зубця;

δ – кут перетину осей конусів;

δ_1, δ_2 – кути ділильних конусів;

Ok_1, Ok_2 – дотичні площини зачеплення (ПЗч) відповідно до ОК₁ і ОК₂;

cd – лінія контакту зубців у полюсі;

A – точка прикладення сили взаємодії зубців коліс F_n .

Визначенню підлягають наступні сили:

F_n – нормальна, F_t – окружна, F_a – осьова і F_r – радіальна сила.

Відзначимо, що будемо посилатись на площину дотичну до ДК₁ і ДК₂ (по лінії OP), яка на рис. 4.46 проєктується в лінію OP . Назвемо цю площину

ну ПДт, вона показана на рис. 4.47 (фрагмент 0). Кут між цією площиною і площиною зачеплення ПЗч – це кут зачеплення α_w . Будемо розглядати сили дії колеса 1 на 2 (без індекса «₁₂»).

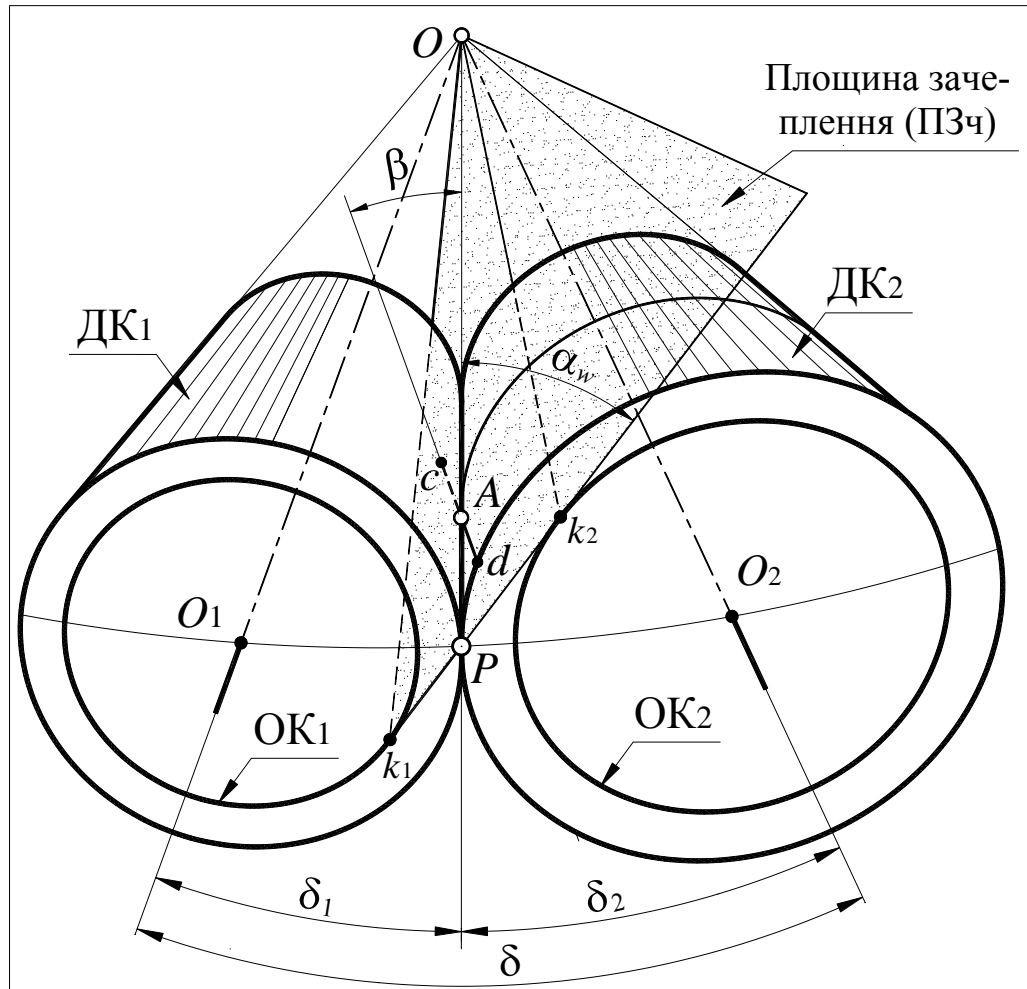


Рис. 4.46. До визначення положення сил в зачепленні косозубих конічних коліс

Вектор повної сили взаємодії F_n прикладений в точці A і розташований в площині зачеплення перпендикулярно лінії cd (див. рис. 4.46). Силу F_n розкладаємо на дві складові (на рис. 4.47, фрагмент 2): F_N – нормальна проекція сили на площину ПДт, яка дотична до ділительних конусів; F_v – сила, що направлена $F_v \perp F_N$. В площині ПДт F_N розкладаємо на складові F_t і F_u (на рис. 4.47, фрагмент 1). Напрямки сил наступні: $F_t \perp OP$, $F_u \parallel OP$.

Визначення сил починаємо з окружної сили. Її величина може бути визначена за залежністю

$$F_t = 2T / d_w. \quad (4.92)$$

З фрагменту 1 на рис. 4.47 маємо, що

$$F_N = \frac{F_t}{\cos\beta}, \quad (4.93)$$

$$F_u = F_t \cdot \operatorname{tg}\beta.$$

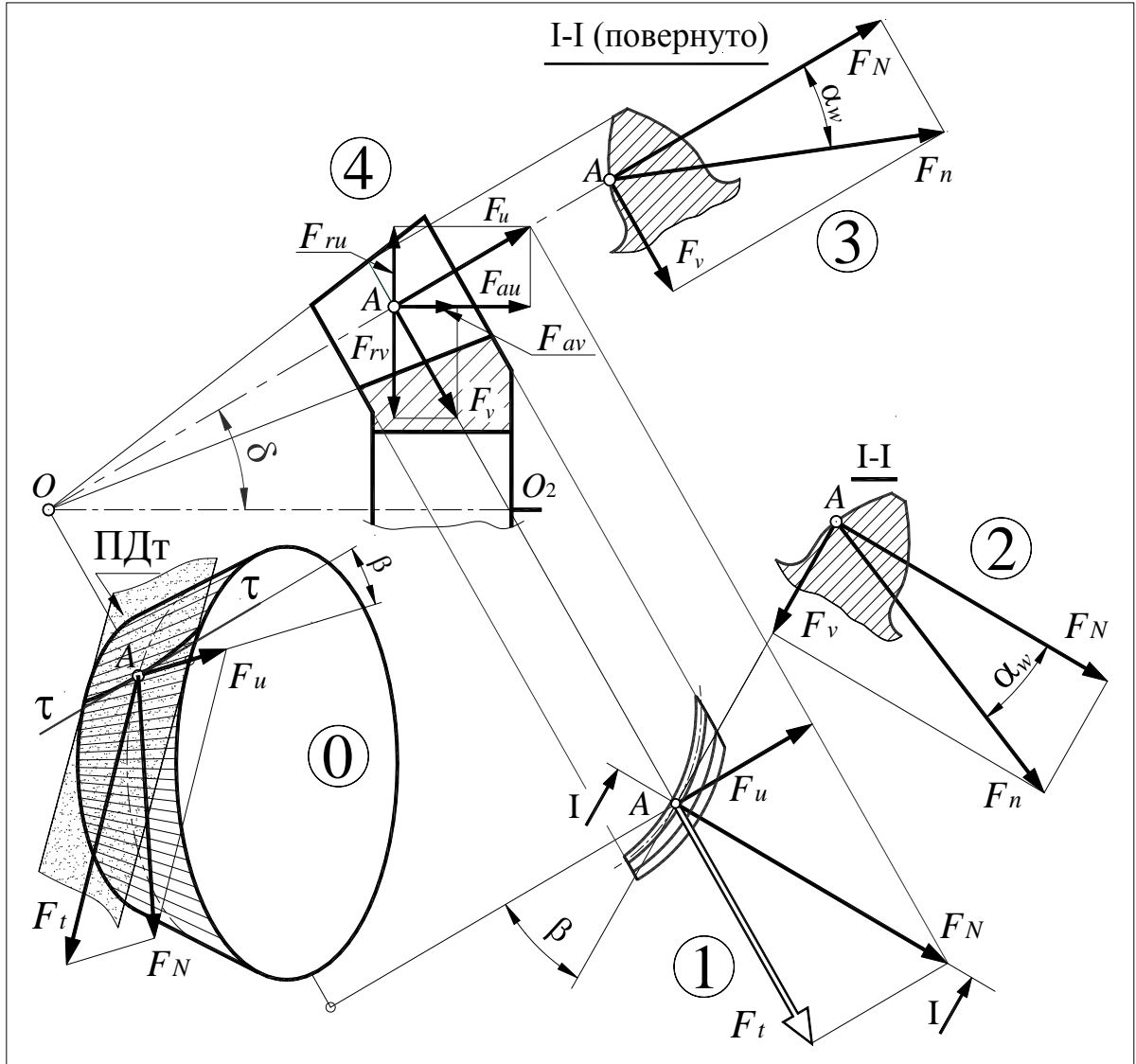


Рис. 4.47. До визначення сил в зачепленні не прямозубих конічних коліс

З фрагменту 2 на рис. 4.47 визначаємо

$$F_n = \frac{F_N}{\cos\alpha_w} = \frac{F_t}{\cos\beta \cdot \cos\alpha_w}, \quad (4.94)$$

$$F_v = F_N \cdot \operatorname{tg}\alpha_w = \frac{F_t \cdot \operatorname{tg}\alpha_w}{\cos\beta}.$$

Відзначимо, що ми знайшли повну силу взаємодії зубців F_n та дві складові F_u і F_v . Напрямки цих двох сил наступні: $F_u \parallel OP$, $F_v \perp OP$ (див.

рис. 4.46 і на рис. 4.47 фрагмент 4). Сили F_u і F_n розкладемо на складові за напрямками осьових і радіальних сил (див на рис. 4.47 фрагмент 4). Для забезпечення проєкційного зв'язку фрагментів 2 і 4, фрагмент 2 переносимо і повертаємо так, щоб він зайняв положення 3. Таким чином має місце проєкційний зв'язок фрагментів 1 і 4.

З фрагментів 1 і 3 переносимо відповідно сили F_u і F_n в точку А фрагмента 4 і розкладаємо на складові $\vec{F}_u = \vec{F}_{au} + \vec{F}_{ru}$, $\vec{F}_v = \vec{F}_{av} + \vec{F}_{rv}$. Отримаємо

$$\begin{aligned} F_{au} &= F_u \cdot \cos \delta = F_t \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \delta, \\ F_{ru} &= F_u \cdot \sin \delta = F_t \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \delta, \\ F_{av} &= F_v \cdot \sin \delta = \frac{F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha_w \cdot \sin \delta}{\cos \beta}, \\ F_{rv} &= F_v \cdot \cos \delta = \frac{F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha_w \cdot \cos \delta}{\cos \beta}. \end{aligned} \quad (4.95)$$

З урахуванням напрямків складових F_{au} , F_{ru} , F_{av} і F_{rv} осьові і радіальні сили будуть рівні

$$\begin{aligned} F_r &= F_{rv} - F_{ru}, \\ F_a &= F_{av} + F_{au}. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Після підстановки в (4.96) значень сил F_{au} , F_{ru} , F_{av} і F_{rv} отримаємо

$$\begin{aligned} F_a &= \frac{F_t}{\cos \beta} \cdot (\operatorname{tg} \alpha_w \cdot \sin \delta + \sin \beta \cdot \cos \delta); \\ F_r &= \frac{F_t}{\cos \beta} \cdot (\operatorname{tg} \alpha_w \cdot \cos \delta - \sin \beta \cdot \sin \delta). \end{aligned} \quad (4.97)$$

Примітка: При зміні знаку кута β на протилежний, в дужках виразів (4.97) знаки також зміняться на протилежні. Відзначимо, що перші складові в дужках цих формул залежать тільки від кутів ділительних конусів, а другі ще й від β .

4.7. Питання для самопідготовки за розділом

1. Які профілі зубців зубчастих коліс називаються спряженими?
2. Сформулюйте і доведіть основний закон (теорему) зачеплення.
3. Що таке полюс зачеплення? Які окружності називаються початковими?
4. Який відносний рух зубців у зовнішньому зачепленні?

5. Які особливості має відносний рух зубців у внутрішньому зачепленні?
6. Як визначити швидкість ковзання зубців?
7. Що таке лінія зачеплення?
8. Як визначити границі теоретичної і робочої ділянок лінії зачеплення?
9. Що таке початкові окружності коліс і чим вони відрізняються від ділительних окружностей?
10. Опишіть геометричні властивості евольвенти.
11. Перерахуйте переваги і недоліки евольвентного зачеплення.
12. Опишіть геометрію евольвентного зубчастого колеса.
13. Що таке модуль зачеплення?
14. Що таке кут зачеплення?
15. Опишіть геометричні особливості зовнішнього евольвентного зачеплення.
16. Що таке коефіцієнт перекриття евольвентного зачеплення і як він визначається графоаналітично?
17. Що таке зони однопарного і двопарного зачеплення?
18. Від яких факторів залежить величина коефіцієнта перекриття?
19. Визначте коефіцієнти питомого ковзання евольвентних профілів.
20. Зобразіть відомий Вам початковий контур евольвентного зачеплення.
21. Зобразіть відомий Вам початковий виробляючий контур евольвентного зачеплення.
22. Охарактеризуйте існуючі методи нарізування евольвентних зубчастих коліс.
23. Які зубонарізні інструменти Ви знаєте?
24. Що таке підріз евольвентних профілів?
25. В яких випадках виникає підріз ніжки і зріз голівки зубця?
26. Який інструмент застосовується при нарізанні коліс з внутрішніми зубцями?
27. З яких міркувань слід вибирати число зубців довбача при нарізанні коліс з зовнішніми і внутрішніми зубцями?
28. Що таке мінімальне число евольвентних зубців? Як його визначити?
29. З яких міркувань кут сучасного евольвентного зачеплення дорівнює 20° ? Які значення цього кута застосовувалися раніше? Чому від них відмовилися?

30. Як можна поліпшити (виправити, скорегувати) евольвентне зачеплення?
31. Здійсніть визначення мінімально необхідного зсуву для усунення підрізу зубців.
32. Як визначити ділильну товщину зубця і ділильну ширину западини зубчастого евольвентного колеса, нарізаного зі зсувом?
33. Які колеса і які зачеплення коліс називаються нульовими, додатними, від'ємними?
34. Що таке ділильна окружність евольвентного зубчастого колеса? Як визначити її діаметр? Чому дорівнює профільний кут евольвенти на ділильній окружності?
35. Що таке основна окружність евольвентного колеса? Як визначити її діаметр? Чому дорівнює профільний кут евольвенти на основній окружності?
36. Як змінюється форма евольвентного зубця при його нарізуванні зі зсувом?
37. Запишіть рівняння евольвенти в полярних координатах у параметричній формі?
38. Як визначити товщину евольвентного зубця по окружності довільного радіуса?
39. Як визначити монтажний кут безззорного евольвентного зачеплення, нарізаного зі зсувом?
40. Як визначити монтажну міжосьову відстань безззорного евольвентного зачеплення, нарізаного зі зсувом?
41. Як визначаються радіуси окружностей вершин зубців безззорного евольвентного зачеплення зі зсувом?
42. Що таке коефіцієнт зрівняльного зсуву і коефіцієнт сприйманого зсуву?
43. Які основні особливості косозубих і шевронних евольвентних зубчастих коліс?
44. Як геометрично утворюються лінійчаті евольвентні поверхні прямого і косоного зубців?
45. Які модулі косозубого евольвентного зачеплення Вам відомі? Як визначаються геометричні розміри косозубого колеса?
46. Охарактеризуйте коефіцієнт перекриття косозубого і шевронного зачеплень?
47. Розкладіть повну силу взаємодії косих зубців на три складові (окружну, радіальну й осьову). Запишіть формули для їхнього визначення.
48. Знайдіть еквівалентне число зубців косозубого колеса і розкрийте його фізичний зміст.

49. Чому одне із шевронних коліс виконується плаваючим в осьовому напрямку?

50. Опишіть наближене профілювання зубців конічних евольвентних коліс.

51. Визначте еквівалентне число зубців конічного евольвентного колеса і розкрийте його фізичний зміст.

52. Чому мінімальне число зубців конічного евольвентного зачеплення менше, ніж у циліндричного?

53. Розкладіть повну силу взаємодії зубців конічного прямозубого зачеплення на три складові (окружну, радіальну й осьову). Запишіть формули для їхнього визначення.

54. Від яких геометричних параметрів залежать осьова і радіальна сили в зачепленні конічних не прямозубих коліс?

Література та інформаційні джерела

1. Гречко Л. П. Важільні механізми, передачі і зачеплення. Харків : ХНАДУ, 2002. 220 с.
2. Гречко Л. П. Синтез механізмів і динаміка машин. Харків : ХНАДУ, 2002. 218 с.
3. Кіницький Я. Т. Теорія механізмів і машин. Київ : Наукова думка, 2002. 660 с.
4. Перегон В. А., Воропай О. В., Коряк О. О., Поваляєв С. І. Синтез механізмів і динаміка машин : навчальний посібник. Харків : ФОП Бровін О.В. 2023. 164 с. ISBN 978-617-8238-36-0.
5. John J. Uicker, Jr., Gordon R. Pennock, Joseph E. Shigley. Theory of Machines and Mechanisms. New York, Oxford : Oxford University Press, 2017. 978 p.
6. Zakhovaiko O. P. Theory of Mechanisms and Machines. Part 1. Kyiv : Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2020. 188 p.
7. Zakhovaiko O. P. Theory of Mechanisms and Machines. Part 2. Kyiv : Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2021. 184 p.

ПЕРЕГОН Володимир Андрійович

ВОРОПАЙ Олексій Валерійович

КОРЯК Олександр Олексійович

ЄГОРОВ Павло Анатолійович

ВАЖІЛЬНІ МЕХАНІЗМИ, ПЕРЕДАЧІ ТА ЗАЧЕПЛЕННЯ

Навчальний посібник

для студентів технічних спеціальностей

закладів вищої освіти